Miguel Miranda

PROGRAMACIÓN LINEAL

y su entorno

INCLUYE CD CON LICENCIA DE VERSIÓN ESTUDIANTIL DE LOS SOFTWARE LINDO, LINGO y WHAT'S*BEST!*



I₁ 16/11

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

1.1 PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Los modelos de decisión, también llamados optimizantes, son aquellos que formulan una función objetivo a maximizar o minimizar. La resolución de estos problemas consiste en determinar el valor (o nivel de actividad) que deben tener las variables para alcanzar el mejor valor de la función objetivo.

Los modelos de decisión se clasifican en problemas no restringidos y en problemas restringidos (llamados "programas matemáticos", y en forma genérica "programación matemática").

Los problemas no restringidos son aquellos que solamente tienen formulado un objetivo y tienen la forma:

$$\text{MAX } f(X)$$

o bien:

$$\text{MIN } f(X)$$

en donde X es un vector de variables ($x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$). Normalmente, las variables están afectadas por parámetros, denominados coeficientes del funcional. Un ejemplo de problema no restringido es el siguiente:

$$\text{MIN: } 3\,x_1 + 2/x_1 + \ln x_2 + 4\,x_1\,x_2$$

La programación matemática (PM) se puede definir como la formulación, solución y análisis de modelos de decisión que, además del planteo de un funcional, incluyen una o más restricciones que se deben satisfacer.

Las variables de decisión (que denotaremos en forma general como x_i) representan las actividades o incógnitas del problema. Ejemplos de variables pueden ser la cantidad de unidades a fabricar de diferentes productos en un período de tiempo, la cantidad de dinero a invertir en distintas alternativas financieras, el número de personas asignadas a un conjunto de actividades, el tiempo de realización de tareas, etcétera.

El objetivo de un programa matemático es siempre la optimización de un resultado. La formulación matemática del objetivo del problema se denomina "funcional" o "función objetivo". Ejemplos de objetivos de problemas físico-económicos pueden ser: maximizar el beneficio, minimizar el costo, maximizar la producción, minimizar el desperdicio, maximizar el empleo de la mano de obra, minimizar el impacto ambiental, maximizar los clientes potenciales, etcétera.

Las restricciones (o limitaciones) de un problema de PM se plantean a través de ecuaciones o inecuaciones. La formulación matemática de las restricciones del problema se conoce con el nombre de "condiciones de vínculo".

Típicamente las restricciones representan recursos y requerimientos. Los recursos de un problema real pueden representar dinero, materiales, materias primas, mano de obra, capacidad de planta, capacidad de venta, capacidad de distribución, etc. Las formulaciones matemáticas de las limitaciones de recursos son típicamente restricciones de $\leq$ o de $=$:

$$f(x_j) \leq b_i$$

o

$$f(x_j) = b_i$$

en donde b_i representa la disponibilidad del recurso i.

Los requerimientos, a su vez, pueden ser cantidades mínimas a producir, calidades a satisfacer de productos, balances físicos, etc. Las formulaciones matemáticas de las limitaciones de requerimientos son típicamente restricciones de $\geq$ o de $=$:

$$f(x_j) \geq b_i$$

o

$$f(x_j) = b_i$$

en donde b_i representa el valor que se debe satisfacer del requerimiento i.

En las restricciones, las variables también están afectadas por parámetros. Ejemplos de formulación de limitaciones son los siguientes:

- $20\,x_1 + 40\,x_2 \leq 8000$
- $6\,x_1\,x_2 - e^{-x_1} = 50$
- $x_1 \geq 1000$
- $1000/x_1 + 8000/x_2 \leq 30$

La naturaleza física de las actividades impone condiciones matemáticas a las variables que las representan, por ejemplo que las variables sean no negativas ($x_j \geq 0$), no positivas ($x_j \leq 0$), irrestrictas, acotadas inferiormente ($x_j \geq d$), acotadas superiormente ($x_j \leq d$), continuas, enteras, etc. En la mayoría de los problemas físico-económicos de la realidad, las variables presentan la condición de no-negatividad. Esto es, no se podría fabricar una cantidad negativa de unidades de un producto; a lo sumo podríamos no fabricarlo, en cuyo caso la variable asume el valor cero.

Un programa matemático consiste entonces en un funcional a optimizar (maximizar o minimizar) sujeto a un conjunto de condiciones de vínculo y a un conjunto de condiciones de las variables de decisión (incógnitas). Una forma general de planteamiento de un PM es la siguiente:

MAX [o MIN]:	$f(X)$
Sujeto a:	$g_1(X) \le [=, \ge] b_1$
	$g_2(X) \le [=, \ge] b_2$
	....
	$g_m(X) \le [=, \ge] b_m$

en donde X es un vector de variables (x_1, x_2, x_3, ..., x_k) sujeto a determinadas condiciones.

El objeto de la PM es determinar la mejor asignación de los recursos y requerimientos a las diferentes actividades (representadas por las variables) de manera tal de optimizar el objetivo planteado y cumpliendo con las restricciones del problema.

Existen muchos algoritmos para resolver los problemas de PM, cada uno de ellos diseñado para encontrar la solución óptima, es decir el nivel de cada una de las variables de decisión que da el mejor valor al funcional, a la vez que se satisfacen todas las condiciones de vínculo y de las variables.

La programación lineal (PL) es un caso particular de la programación matemática en donde las relaciones entre las variables, tanto en el funcional como en las condiciones de vínculo, son de tipo lineal. Una gran mayoría de los sistemas y procesos reales responden a fenómenos que se pueden describir a través de ecuaciones o inecuaciones lineales. La siguiente restricción es del tipo lineal:

- $6\,x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 \le 18$

Si, en cambio, las relaciones de las variables en el funcional o en las condiciones de vínculo, o en ambos, no son lineales, se dice que el problema es un programa no lineal. Ejemplos de limitaciones no lineales son:

- $6\,x_1 + 2\,x_2^2 + x_3^{-1} + x_1 x_4 \ge 10$
- $-4\,x_1 + \log x_2 + x_3^{1/2} = 50$

Un caso particular de programación no lineal lo constituye la "programación cuadrática" en donde las restricciones son lineales pero la función objetivo es la suma de una forma lineal y cuadrática, del tipo:

$$\text{MAX: } 6\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_1 x_2 + 2\,x_3^2$$

Otro caso de programación no lineal es la "programación separable" en donde la función objetivo o las restricciones pueden formularse mediante funciones separables; por ejemplo:

$$6\,x_1 + 2\,x_2^2 + x_3^{-1} \ge 650$$

Una caracterización adicional de los programas matemáticos se puede hacer en función de la naturaleza de las variables. Los problemas son de "programación continua" cuando todas las variables asumen valores continuos, de "programación entera" cuando todas las variables asumen valores enteros (también llamados discretos) y de "programación entera mixta" cuando algunas variables son continuas y otras enteras.

Un caso especial de la programación entera es la denominada "programación binaria", que es el que se da cuando todas las variables asumen únicamente valores 0 o 1. Existen también problemas de "programación binaria mixta", cuando algunas variables son continuas y otras binarias.

Finalmente, en la denominada "programación mixta" tendremos variables de los tres tipos mencionados (continuas, enteras y binarias).

En el año 1947, George Dantzig desarrolló y describió un método para resolver problemas de programación lineal, que se denominó algoritmo del *Simplex*, en donde las variables intervinientes en el problema son continuas y no negativas y los términos independientes son no negativos. Sobre la base de este método de resolución se desarrollaron luego técnicas para resolver problemas matemáticos binarios, enteros y algunos no lineales.

La programación matemática se aplica a la resolución de innumerables problemas en la administración de sistemas empresariales, entre los que podemos mencionar programación de la producción, mezcla de componentes, asignación de actividades, distribución de productos, etcétera., y en otros ámbitos no industriales, tales como operaciones militares, medicina, administración gubernamental, etcétera.

1.2 PROGRAMACIÓN LINEAL

Un programa matemático en el cual todas las restricciones y el funcional son funciones lineales es un programa lineal (PL).

Normalmente, en los problemas lineales se da la condición de no negatividad de las variables. En consecuencia, un problema de programación lineal queda formulado matemáticamente de la siguiente forma:

Maximizar una función del tipo $\Sigma\ c_j\ x_j$
sujeto a un conjunto de restricciones del tipo $\Sigma\ a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$
siendo las $x_j \geq 0$.

Por supuesto que un problema de maximización puede convertirse en un problema de minimización (y viceversa) y una restricción de mayor igual puede formularse como una restricción de menor o igual (y viceversa).

Los parámetros c_j que afectan a las variables en la función objetivo se conocen con el nombre de coeficientes del funcional, los parámetros a_{ij} que afectan a las variables en las condiciones de vínculo se denominan coeficientes tecnológicos y los parámetros b_i se llaman términos independientes o RHS (del inglés *right hand side*).

Para un problema de "k" variables y "m" restricciones, la formulación matemática de un problema de maximización con restricciones de menor o igual es:

MAX:	$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_k x_k$
Sujeto a:	$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1k} x_k \leq b_1$
	$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2k} x_k \leq b_2$
	$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3k} x_k \leq b_3$
	....
	$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mk} x_k \leq b_m$
siendo:	$x_j \geq 0$

La anterior es la denominada forma canónica de un problema de maximización.

Sin embargo, cada inecuación de $\leq$ puede transformarse en una ecuación, simplemente sumando una variable no negativa. Esta forma de presentar un problema matemático lineal se llama estándar.

La forma estándar de un problema de programación lineal es, entonces:

MAX	$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_k x_k$
Sujeto a	$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1k} x_k + x_{k+1} = b_1$
	$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2k} x_k + x_{k+2} = b_2$
	$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3k} x_k + x_{k+3} = b_3$
	....
	$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mk} x_k + x_n = b_m$
siendo	$x_j \geq 0$

Las condiciones de vínculo de un problema de PL expresado en su forma estándar constituyen un sistema de ecuaciones de "n" variables y "m" incógnitas.

A continuación se desarrollará un ejemplo básico, simple, que se tomará como base para el desarrollo de los diferentes conceptos teóricos que se expondrán en los capítulos siguientes.

Ejemplo 1.1:

Una empresa manufacturera fabrica dos piezas A y B, que dejan respectivamente una utilidad de $400 y $300 por unidad. El proceso de elaboración de ambos productos consiste en tres etapas: un tratamiento térmico realizado en un equipo que tiene una disponibilidad mensual de 720 horas, un proceso de mecanizado llevado a cabo en un sector de máquinas que cuenta con una capacidad mensual de 640 horas y una etapa de finalización manual efectuada en un departamento que tiene una disponibilidad de 480 horas hombre por mes. Se desea determinar el plan de fabricación mensual. El tiempo que requiere cada unidad en las diferentes etapas de elaboración, para cada tipo de pieza, se indica a continuación:

	A	B
TRATAMIENTO TÉRMICO	9	18
MÁQUINA	16	8
MANO DE OBRA	10	10

Para resolver el problema se asumen las siguientes hipótesis:

1. La producción es continua. Si al finalizar el mes una pieza ha sido comenzada pero aún no se finalizó su fabricación, la parte que falta terminar se continuará el mes siguiente. Esto nos permite suponer que las variables son continuas.
2. No existen otras limitaciones físicas u operativas más que las enunciadas, es decir, no hay restricciones de despacho, materia prima, almacenamiento, ni de otros recursos. Tampoco es limitativa la demanda, es decir, se asume que todas las piezas fabricadas se pueden vender.
3. El sobrante de los recursos de Tratamiento Térmico (TT), de Maquinaria (MA) y de Mano de Obra (MO) no se utiliza.
4. Los precios no varían en el período.

Los interrogantes a responder (variables de decisión) son las cantidades de piezas A y B que se deben producir en el mes con el fin de maximizar las utilidades (objetivo).

Llamando:

x_1 a la cantidad de piezas de tipo A a fabricar por mes, y

x_2 a la cantidad de piezas de tipo B a fabricar por mes,

la función objetivo del problema será:

MAX: $400\ x_1 + 300\ x_2$

Las restricciones del proceso son la disponibilidad máxima de los recursos de TT, MA y MO. Con relación al recurso Tratamiento Térmico, si cada pieza A insume 9 hs y cada pieza B insume 18 hs, la utilización mensual total de horas de este recurso será $9\ x_1 + 18\ x_2$. Obviamente, dicha utilización no puede superar a la disponibilidad; luego:

$$9\ x_1 + 18\ x_2 \leq 720$$

Del mismo modo, el requerimiento del recurso Maquinaria está dado por la expresión $16\ x_1 + 8\ x_2$, y este valor no puede exceder a la disponibilidad mensual:

$$16\ x_1 + 8\ x_2 \leq 640$$

Finalmente, para el recurso Mano de Obra tendremos:

$$10\ x_1 + 10\ x_2 \leq 480$$

Como se puede observar, tanto las restricciones como la función objetivo son relaciones lineales. Por otra parte, las variables x_1 y x_2 cumplen con la condición de no ne-

gatividad. Esto es, se puede no producir (valor cero de las variables) o producir (valor positivo de las variables) piezas A y B en el mes.

En definitiva, nos ha quedado formulado el siguiente programa matemático lineal:

MAX:	$400\,x_1 + 300\,x_2$
Sujeto a:	$9\,x_1 + 18\,x_2 \leq 720$
	$16\,x_1 + 8\,x_2 \leq 640$
	$10\,x_1 + 10\,x_2 \leq 480$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

1.3 RESOLUCIÓN GRÁFICA

Para la resolución analítica de este tipo de problemas existen diversos algoritmos, entre ellos el algoritmo del *Simplex*. Sin embargo, como se trata de un problema de solamente dos variables, ensayaremos una resolución gráfica.

Tomaremos un par de ejes cartesianos en donde se representará en abscisas a x_1 y en ordenadas a x_2. Como se cumple con la condición de no negatividad de las variables, el resultado estará siempre sobre el primer cuadrante.

Grafiquemos en primer lugar la restricción correspondiente al Tratamiento Térmico:

$$9\,x_1 + 18\,x_2 \leq 720$$

Para ello (ver pág. 16) se dibuja la ecuación de la recta

$$9\,x_1 + 18\,x_2 = 720$$

y luego se determina la porción de semiplano correspondiente a la desigualdad.

Observando la igualdad, vemos que para x_1 igual a 0, x_2 es igual a 40. Del mismo modo, para $x_2 = 0$, x_1 es igual a 80. Uniendo estos dos puntos tendremos graficada la ecuación de la recta $9\,x_1 + 18\,x_2 = 720$.

Para determinar cuál es la porción de semiplano correspondiente a la desigualdad se prueba con un punto cualquiera, normalmente el origen de coordenadas. En este caso, el origen de coordenadas ($x_1 = 0$ y $x_2 = 0$) satisface la restricción, es decir $0 \leq 720$, por lo que el semiplano correspondiente a la restricción debe contenerlo.

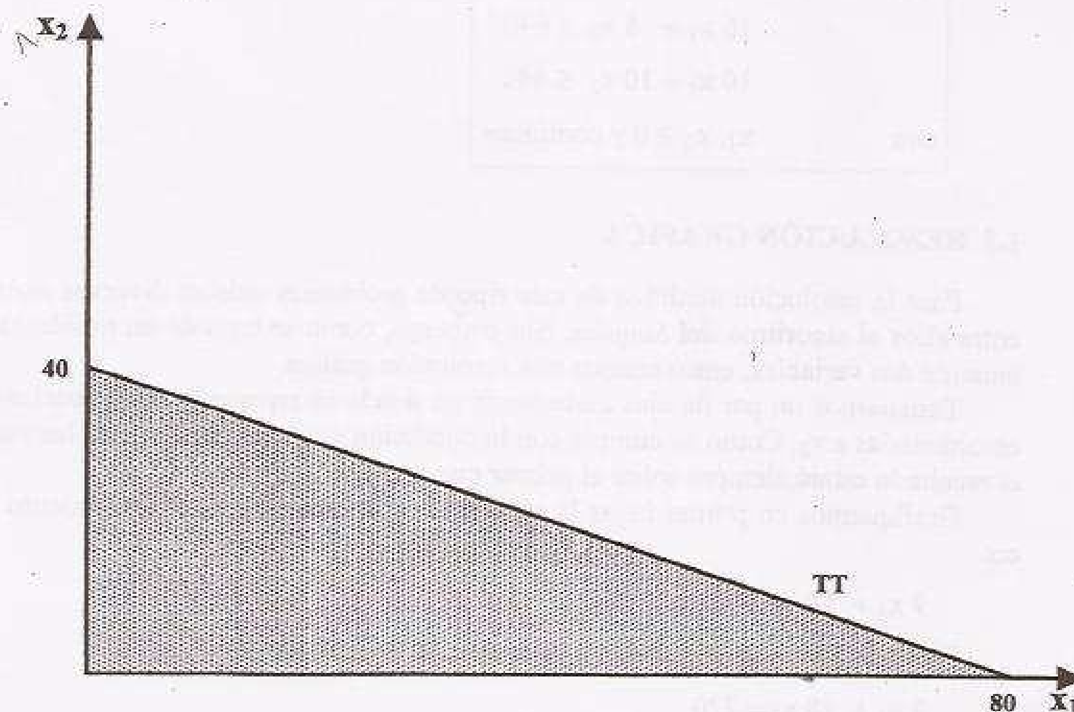
En consecuencia, queda formado un conjunto de infinitas soluciones (cualquier punto por debajo de la recta, perteneciente al triángulo resaltado) que satisface la restricción de TT.

Para representar la inecuación correspondiente al recurso Maquinaria (ver pág. 17), procedemos del mismo modo. Se definen en primer lugar dos puntos de la recta

$$16\,x_1 + 8\,x_2 = 640$$

Para $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 80$

y para $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 40$



Uniendo estos dos puntos queda definida la recta $16\,x_1 + 8\,x_2 = 640$. Para graficar la inecuación se prueba si el origen de coordenadas satisface la desigualdad. En efecto, en este caso también está contenido, por lo que cualquier punto por debajo de la recta satisface la ecuación de MA.

Componiendo las dos restricciones planteadas (TT y MA), queda definido un recinto correspondiente a un polígono, que se muestra en la próxima página. Cualquiera de los infinitos puntos pertenecientes a este recinto es una solución que satisface conjuntamente las restricciones de TT y MA.

Finalmente, representaremos la restricción de mano de obra (MO):

$$10\,x_1 + 10\,x_2 \leq 480$$

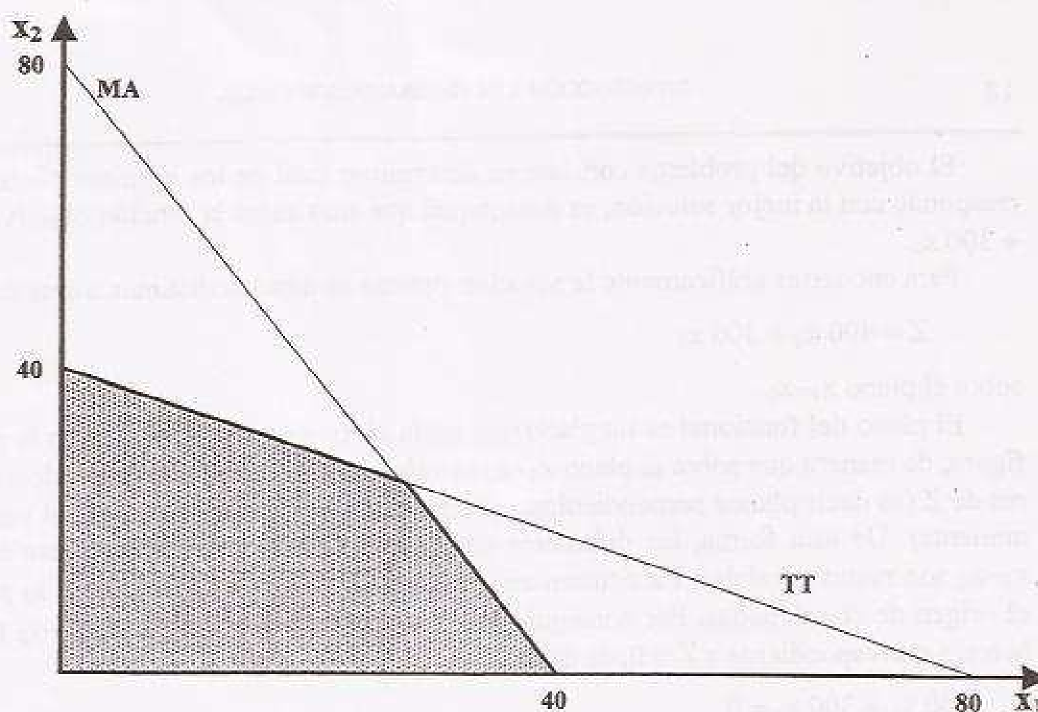
Se definen en primer lugar dos puntos de la recta

$$10\,x_1 + 10\,x_2 = 480$$

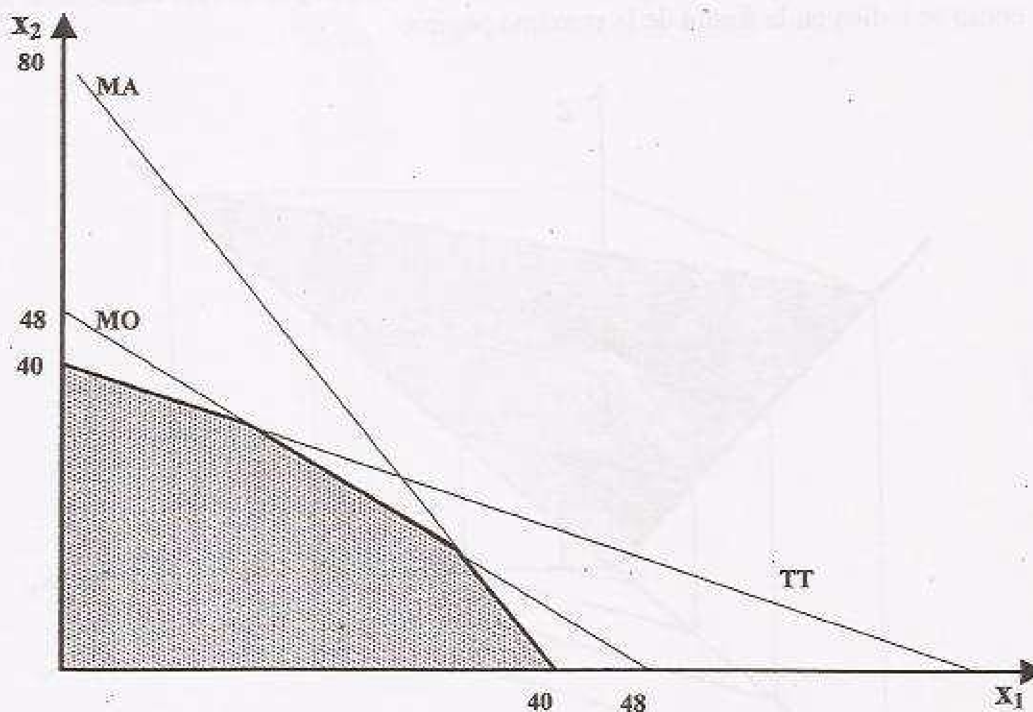
Para $\quad x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 48$

y para $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 48$

Uniendo estos dos puntos queda definida la recta $10\,x_1 + 10\,x_2 = 480$. Para graficar la inecuación se prueba si el origen de coordenadas satisface la desigualdad. También en este caso este punto satisface la restricción por lo que cualquiera de los infinitos puntos por debajo de la recta graficada satisface la ecuación de MO.



Componiendo finalmente las tres restricciones planteadas (TT, MA y MO), queda definido un nuevo recinto de soluciones, tal como se muestra en la figura siguiente. Cualquiera de los infinitos puntos correspondientes a este polígono convexo satisface concurrentemente las tres restricciones y, en consecuencia, es una solución factible del problema.



El objetivo del problema consiste en determinar cuál de los infinitos puntos se corresponde con la mejor solución, es decir aquél que maximiza la función objetivo 400 x_1 + 300 x_2.

Para encontrar gráficamente la solución óptima se dibujan distintas trazas del plano

$$Z = 400\ x_1 + 300\ x_2$$

sobre el plano x_1-x_2.

El plano del funcional es un plano que corta al x_1-x_2 como se indica en la próxima figura, de manera que sobre el plano x_1-x_2 el valor de Z es igual a 0. Para valores mayores de Z (es decir planos perpendiculares y dispuestos por encima de x_1-x_2 el valor de Z aumenta). De esta forma, las diferentes trazas del plano del funcional sobre el plano x_1-x_2 son rectas paralelas. Particularmente, cuando Z = 0, la traza sobre x_1-x_2 pasa por el origen de coordenadas. Por consiguiente, graficaremos sobre el plano x_1-x_2 primero la traza correspondiente a Z = 0, es decir:

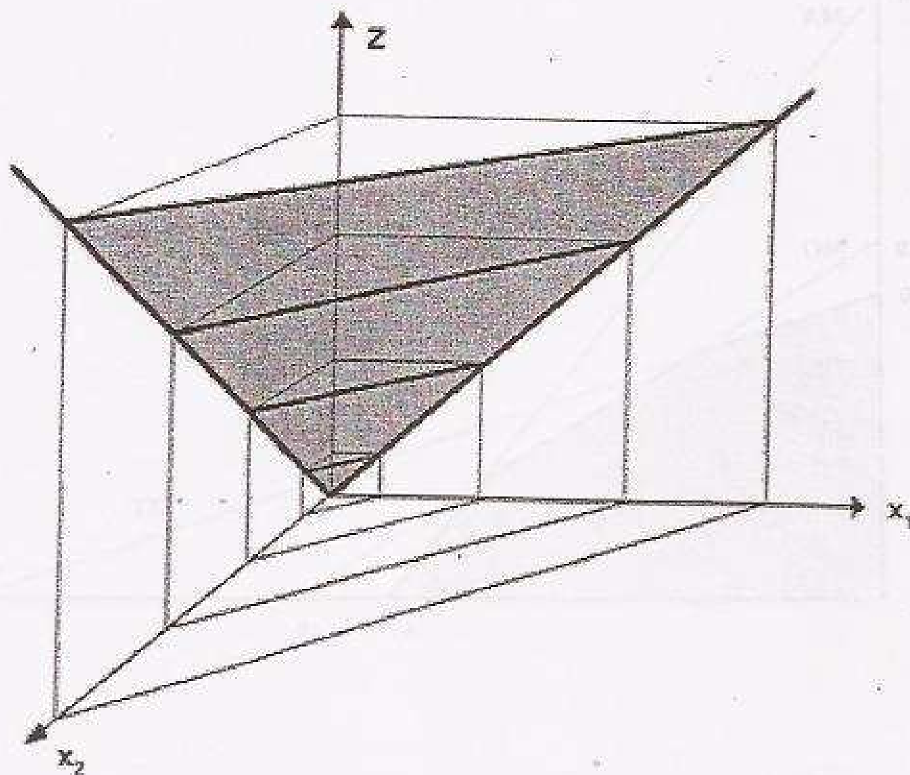
$$400\ x_1 + 300\ x_2 = 0$$

de donde: $x_2 = -\frac{4}{3}x_1$

Cuando $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

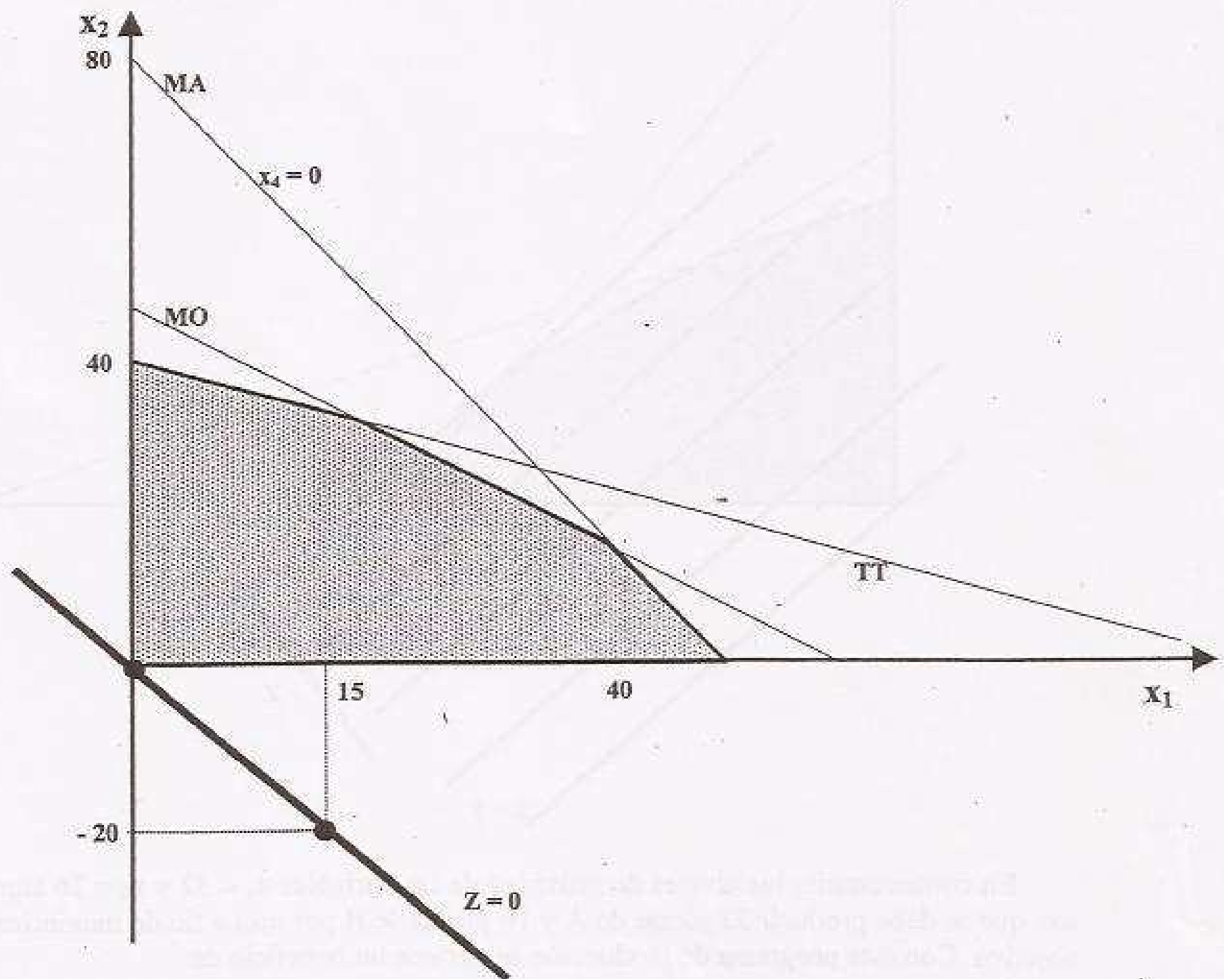
y cuando $x_1 = 15 \Rightarrow x_2 = -20$

Con estos dos puntos se grafica la traza Z = 0 en el par de ejes cartesianos x_1-x_2, tal como se indica en la figura de la próxima página.

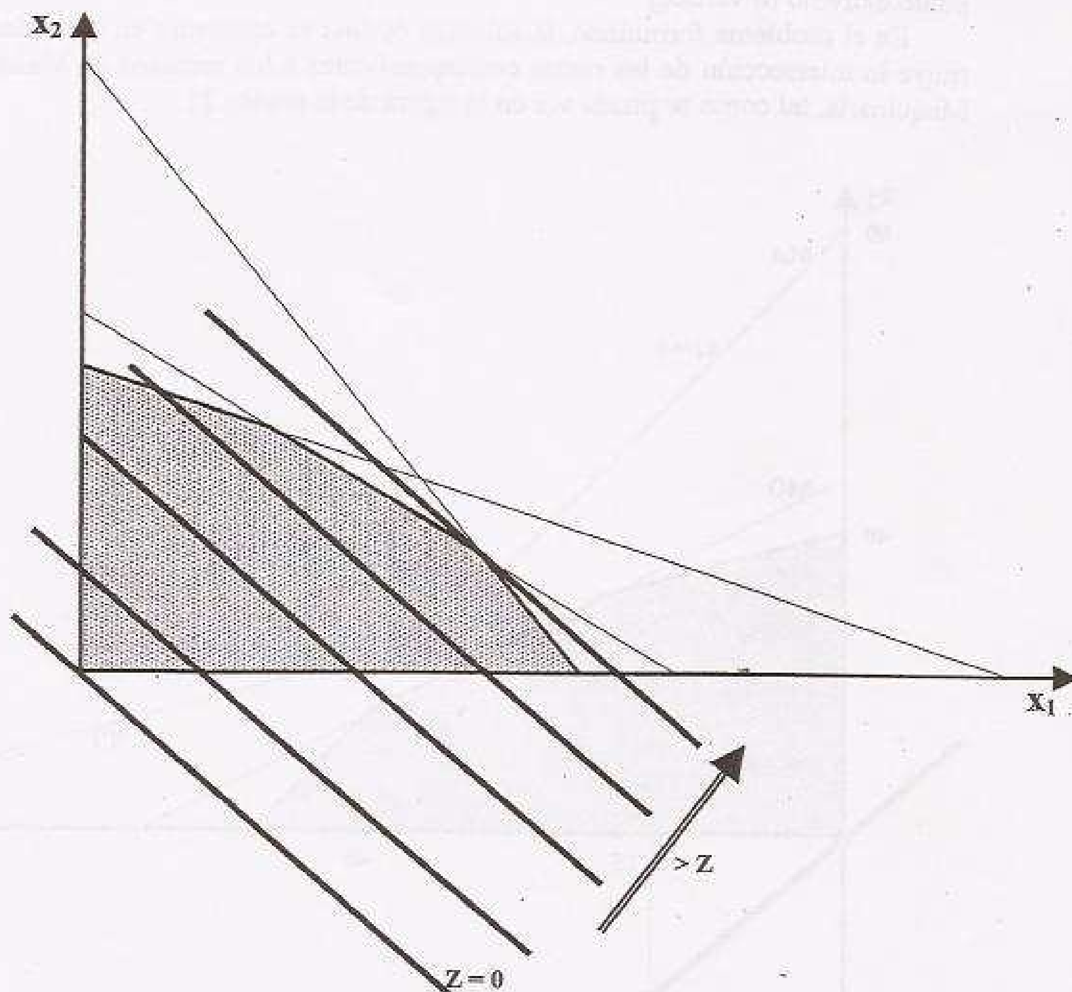


Cualquier valor del funcional Z mayor que cero tendrá, como hemos visto, trazas que constituyen rectas paralelas a $Z = 0$ (ver la figura de la página 20). El valor de Z será tanto mayor cuanto más nos desplacemos en el primer cuadrante hacia valores positivos de x_1 y x_2. En consecuencia, para hallar la solución óptima se debe desplazar la recta del funcional lo máximo posible sin salir del recinto de soluciones factibles y, siendo éste un polígono convexo, la solución óptima del problema se encuentra en un punto extremo (o vértice).

En el problema formulado, la solución óptima se encuentra en el vértice que constituye la intersección de las rectas correspondientes a los recursos de Mano de Obra y Maquinaria, tal como se puede ver en la figura de la página 21.



Leyendo el valor de x_1 correspondiente en el eje de las abscisas, se determina el nivel de actividad óptimo de piezas A, y leyendo el valor de x_2 en el eje de ordenadas se determina el valor óptimo de piezas B a producir por mes.



En consecuencia, los niveles de actividad de las variables $x_1 = 32$ y $x_2 = 16$ significan que se debe producir 32 piezas de A y 16 piezas de B por mes a fin de maximizar el objetivo. Con este programa de producción se obtiene un beneficio de:

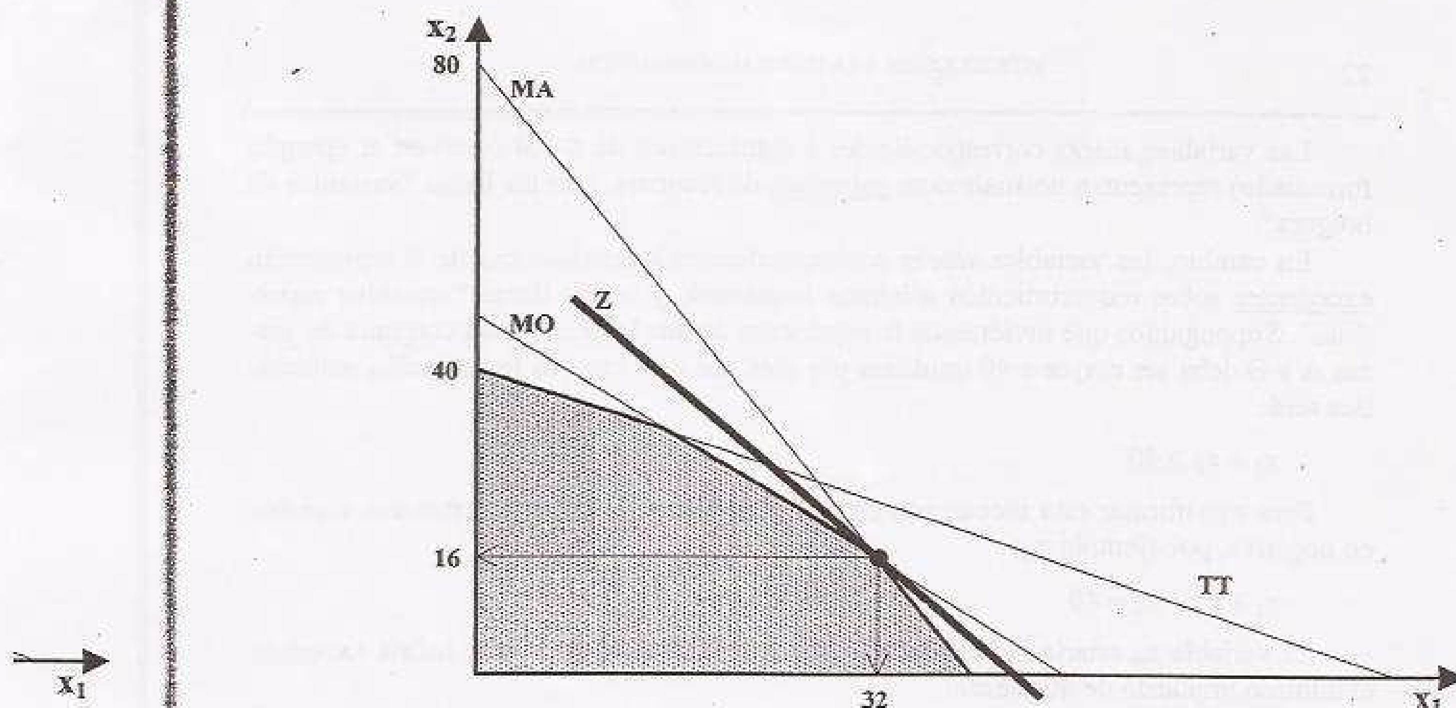
$$Z = 400 \cdot 32 + 300 \cdot 16 = 17600 \text{ \$/mes}$$

La utilización de los recursos se puede determinar reemplazando el valor de x_1 y el de x_2 en cada una de las expresiones. Para este ejemplo tendremos:

TT) $9\,x_1 + 18\,x_2 = 576$

MA) $16\,x_1 + 8\,x_2 = 640$

MO) $10\,x_1 + 10\,x_2 = 480$



1. 4 VARIABLES *SLACKS*

El sistema de inecuaciones planteado para este ejemplo

$$9\,x_1 + 18\,x_2 \leq 720$$

$$16\,x_1 + 8\,x_2 \leq 640$$

$$10\,x_1 + 10\,x_2 \leq 480$$

puede expresarse como un sistema de ecuaciones, simplemente, sumando una variable no negativa en cada restricción:

$$9\,x_1 + 18\,x_2 + x_3 = 720$$

$$16\,x_1 + 8\,x_2 + x_4 = 640$$

$$10\,x_1 + 10\,x_2 + x_5 = 480$$

La variable x_3 representa el sobrante mensual del Tratamiento Térmico, x_4 el sobrante mensual de Maquinaria y x_5 el sobrante mensual de Mano de Obra.

En PM, a las variables de decisión del problema se las llama "variables reales" o también "variables fuertes". En este ejemplo x_1 y x_2 son variables reales.

Las variables que permiten transformar una inecuación en una ecuación se denominan "variables *slacks*" o "variables débiles". En el ejemplo formulado x_3, x_4 y x_5 son variables *slacks*.

Las variables *slacks* correspondientes a restricciones de ≤ (tal como en el ejemplo formulado) representan normalmente sobrantes de recursos, y se las llama "variables de holgura".

En cambio, las variables *slacks* correspondientes a restricciones de ≥ representan excedentes sobre requerimientos mínimos impuestos, y se las llama "variables superfluas". Supongamos que tuviéramos la restricción de que la producción conjunta de piezas A y B deba ser mayor a 40 unidades por mes. En este caso, la formulación matemática será:

$$x_1 + x_2 \geq 40$$

Para transformar esta inecuación en una ecuación se le debería restar una variable no negativa, por ejemplo x_6:

$$x_1 + x_2 - x_6 = 40$$

La variable x_6 estaría indicando en cuántas unidades mensuales se habría excedido el mínimo impuesto de 40 piezas.

Volviendo al problema originalmente planteado, tenemos que el mismo se podría formular, agregando las variables *slacks*, de la siguiente manera:

MAX:	$400\,x_1 + 300\,x_2$			
Sujeto a:	$9\,x_1 + 18\,x_2 + x_3$			$= 720$
	$16\,x_1 + 8\,x_2$	$+ x_4$		$= 640$
	$10\,x_1 + 10\,x_2$		$+ x_5$	$= 480$
con	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ y continuas			

En el primer gráfico de la página 23, sobre la recta de TT dibujada, el valor de la variable x_3 (sobrante de Tratamiento Térmico) es igual a cero, ya que se corresponde con la igualdad

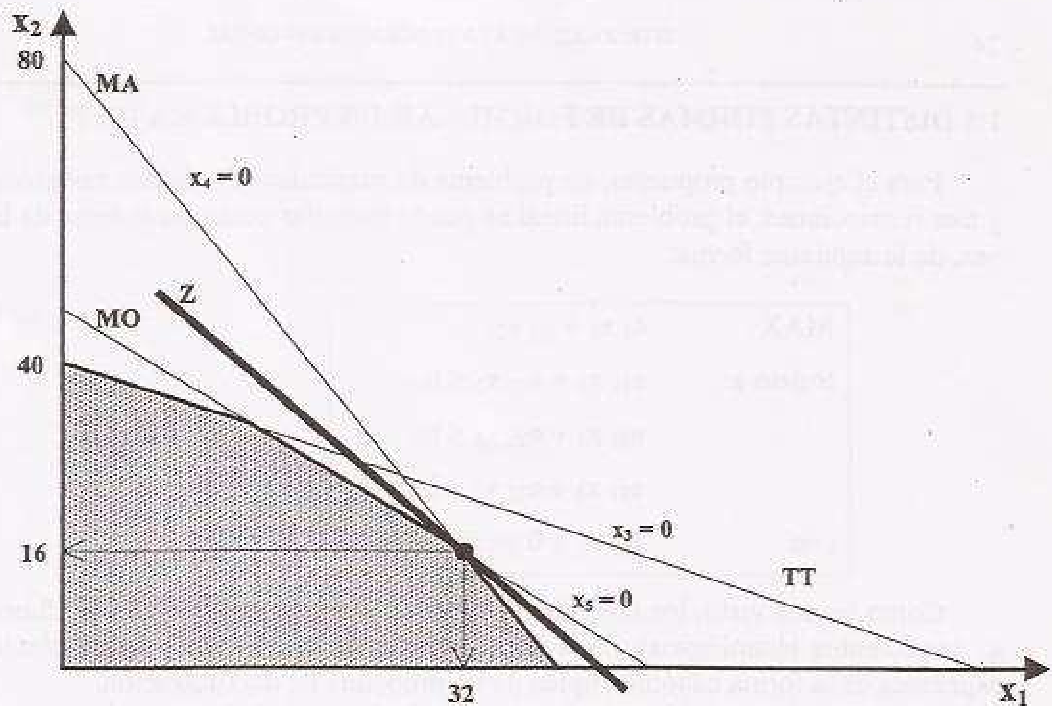
$$9\,x_1 + 18\,x_2 = 720$$

Cualquier punto por debajo de ella implica un valor de $x_3 > 0$.

Del mismo modo, sobre la recta MA la variable x_4 es igual a cero y sobre la recta MO la variable x_5 vale cero.

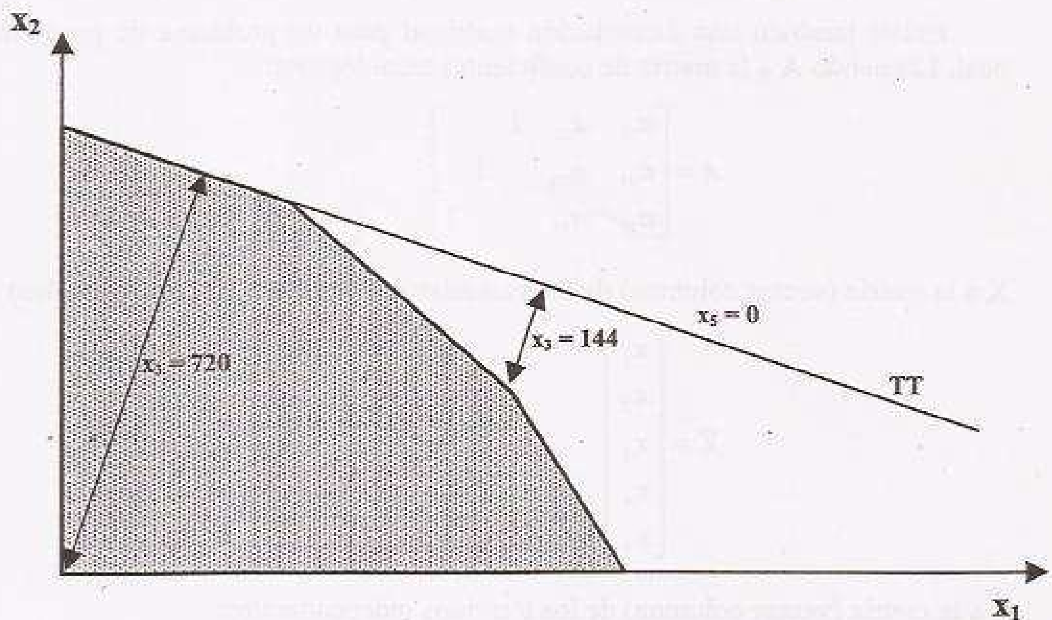
En la solución óptima el valor de x_3 es de 144 hs por mes, es decir, la diferencia entre la disponibilidad (720 hs) y la utilización (576 hs) del recurso TT. Este valor se puede hallar también gráficamente midiendo la distancia del punto óptimo a la recta de TT en la escala que se describe a continuación, y que se muestra en el segundo gráfico de la próxima página.

En el origen de coordenadas, la utilización del recurso es 0, lo que implica que el sobrante es 720 hs. En consecuencia, si la distancia medida (en cm) desde el origen de coordenadas a la recta equivale a 720 hs, la distancia (en cm) desde el punto óptimo a la recta equivale a "x" hs. Procediendo de esta forma en nuestro ejemplo, se puede leer sobre el gráfico que el sobrante del recurso de Tratamiento Térmico es de 144 hs.



Por otra parte, se puede observar gráficamente en la solución óptima del problema que los sobrantes de los recursos de Maquinaria (x_4) y de Mano de Obra (x_5) son nulos, ya que ese punto se encuentra sobre las rectas $x_4 = 0$ y $x_5 = 0$.

Si bien la solución gráfica está limitada a problemas de dos variables reales, resulta muy útil para la interpretación de la geometría de la Programación Lineal y de los conceptos que se verán más adelante.



1.5 DISTINTAS FORMAS DE FORMULAR UN PROBLEMA DE PL

Para el ejemplo propuesto, un problema de maximización de dos variables (x_1 y x_2) y tres restricciones, el problema lineal se puede formular como un sistema de inecuaciones, de la siguiente forma:

MAX:	$c_1 x_1 + c_2 x_2$
Sujeto a:	$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$
	$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2$
	$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq b_3$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

Como hemos visto, los coeficientes c_j se denominan coeficientes del funcional, los a_{ij} coeficientes tecnológicos y los b_i términos independientes. La formulación arriba expresada es la forma canónica típica de un problema de maximización.

Agregando las variables *slacks*, se pasa a la forma estándar:

MAX:	$c_1 x_1 + c_2 x_2$
Sujeto a:	$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + x_3 = b_1$
	$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + x_4 = b_2$
	$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + x_5 = b_3$
con	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ y continuas

Existe también una formulación matricial para un problema de programación lineal. Llamando **A** a la matriz de coeficientes tecnológicos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & & \\ a_{21} & a_{22} & & 1 & \\ a_{31} & a_{32} & & & 1 \end{bmatrix}$$

X a la matriz (vector columna) de las variables del problema (fuertes y débiles):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

B a la matriz (vector columna) de los términos independientes:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

y **C** a la matriz (vector fila) de los coeficientes del funcional:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix}$$

tendremos que en la formulación del problema la función objetivo es el producto matricial

$$Z = C.\,X$$

y las condiciones de vínculo, el producto matricial

$$A\,X = B$$

siendo además el vector $X \geq 0$.

En efecto, el producto matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & & \\ a_{21} & a_{22} & & 1 & \\ a_{31} & a_{32} & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

es el sistema de ecuaciones correspondiente a la forma estándar, y el producto vectorial

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

es el funcional a maximizar.

Más aún, el problema también se puede formular como un producto vectorial.

Sean los vectores

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} \;;\; A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \;;\; A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; A_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces, el funcional y las condiciones de vínculo correspondiente a la forma estándar del problema se pueden plantear también de la siguiente forma:

MAX:	$\sum c_j \cdot x_j$
Sujeto a	$\sum A_j \cdot x_j = B$

Es decir, las condiciones de vínculo se pueden expresar como el siguiente producto vectorial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} \cdot x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \cdot x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_4 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x_5 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, una forma muy conveniente de presentar el problema original cuando se está modelizando un caso con muchas variables y restricciones es en formato de cuadro matricial (o "modo extendido"), en donde los nombres de las columnas son: cada una de las variables reales del problema, signo de la restricción y término independiente, mientras que los nombres de las filas son: objetivo del problema, cada una de las restricciones y tipo de variable.

La mayoría de los sistemas computarizados de PL utilizan esta forma de ingreso de datos para los modelos. La siguiente es la forma extendida de un problema de dos variables y tres restricciones:

	VARIABLE 1	VARIABLE 2	Signo	RHS
MAX	c_1	c_2		
Restricción 1	a_{11}	a_{12}	≤	b_1
Restricción 2	a_{21}	a_{22}	≤	b_2
Restricción 3	a_{31}	a_{32}	≤	b_3
Tipo de variable	condición	condición		

En definitiva, el problema formulado como ejemplo puede plantearse de las siguientes formas:

1) Sistema de inecuaciones:

MAX:	$400\, x_1 + 300\, x_2$
Sujeto a:	$9\, x_1 + 18\, x_2 \leq 720$
	$16\, x_1 + 8\, x_2 \leq 640$
	$10\, x_1 + 10\, x_2 \leq 480$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

2) Sistema de ecuaciones:

$$
\begin{array}{ll}
\text{MAX:} & 400\,x_1 + 300\,x_2 \\
\text{Sujeto a:} & 9\,x_1 + 18\,x_2 + x_3 = 720 \\
 & 16\,x_1 + 8\,x_2 + x_4 = 640 \\
 & 10\,x_1 + 10\,x_2 + x_5 = 480 \\
\text{con} & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ y continuas}
\end{array}
$$

3) Producto matricial:

$$
\text{MAX:} \quad \begin{bmatrix} 400 & 300 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{Sujeto a:} \quad \begin{bmatrix} 9 & 18 & 1 & & \\ 16 & 8 & & 1 & \\ 10 & 10 & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 640 \\ 480 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{con} \quad X \geq 0
$$

4) Producto vectorial:

$$
\text{MAX:} \quad 400\,x_1 + 300\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5
$$

$$
\text{Sujeto a:} \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 720 \\ 640 \\ 480 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{con} \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
$$

5) Cuadro matricial (o "forma extendida"):

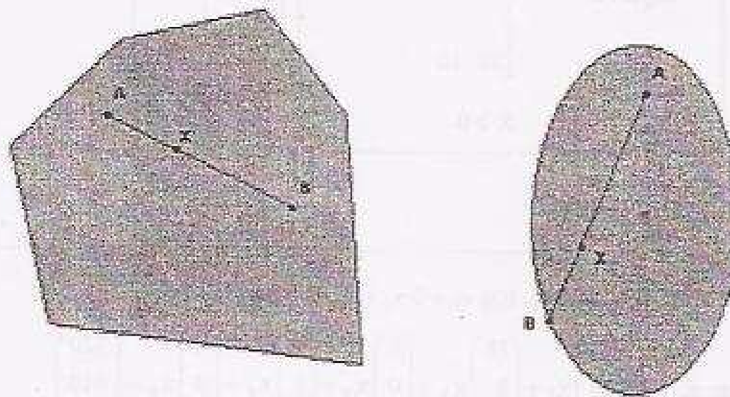
	x_1	x_2	Signo	RHS
MAX	400	300		
TT	9	18	≤	720
MA	16	8	≤	640
MO	10	10	≤	480
Tipo de variable	continua, NN	continua, NN		

1.6 RECINTOS DE SOLUCIONES FACTIBLES

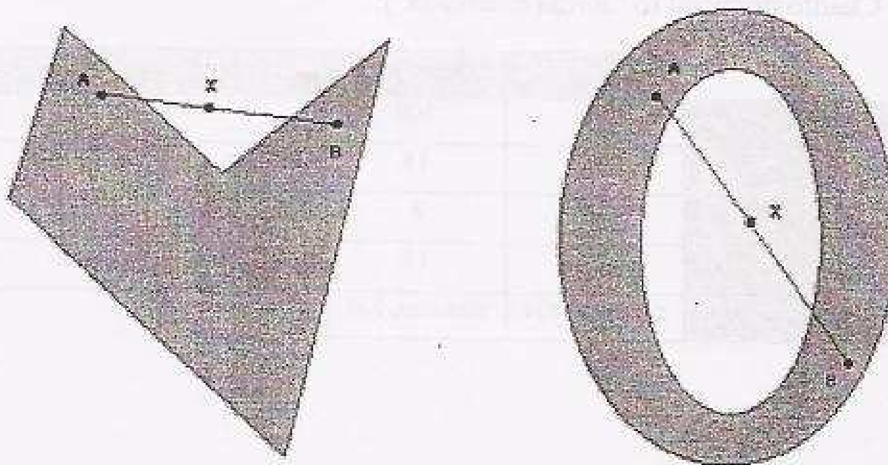
Una solución de un problema de programación matemática puede expresarse como un vector de variables (reales y *slacks*). En forma gráfica, una solución queda representada por un punto.

Las soluciones que satisfacen todas las restricciones del problema se llaman "factibles" y las que no lo hacen se denominan "no factibles".

Gráficamente, las soluciones factibles definen un conjunto que se llama recinto de soluciones factibles. Estos recintos pueden ser convexos o no convexos. Un conjunto es convexo cuando cualquier combinación lineal de dos soluciones factibles es también una solución factible, es decir, si tomamos dos puntos cualquiera (A y B) del recinto, todos los puntos (X) que constituyen una combinación lineal entre A y B también pertenecen al recinto. Por ejemplo, los siguientes conjuntos son convexos:



ya que cualquier combinación lineal X entre A y B también forma parte del conjunto de soluciones factibles. Por el contrario, no son convexos los siguientes recintos:



Los problemas de programación lineal con variables continuas y uniformes definen siempre poliedros convexos. En el caso particular de dos variables reales, tal como hemos visto en el ejemplo formulado, el recinto definido es un polígono convexo.

En un problema de programación lineal de "n" variables (reales y *slacks*) y "m" restricciones, se define como "solución básica" a aquella en la que por lo menos "n–m" variables son nulas (o, dicho de otra forma, como máximo "m" variables son distintas de cero).

Tomemos el ejemplo planteado, en donde la cantidad de variables "n" es 5 y la cantidad de restricciones "m" es 3, y representemos cada solución a través de un vector en donde sus elementos componentes representan el valor que adopta cada una de las variables:

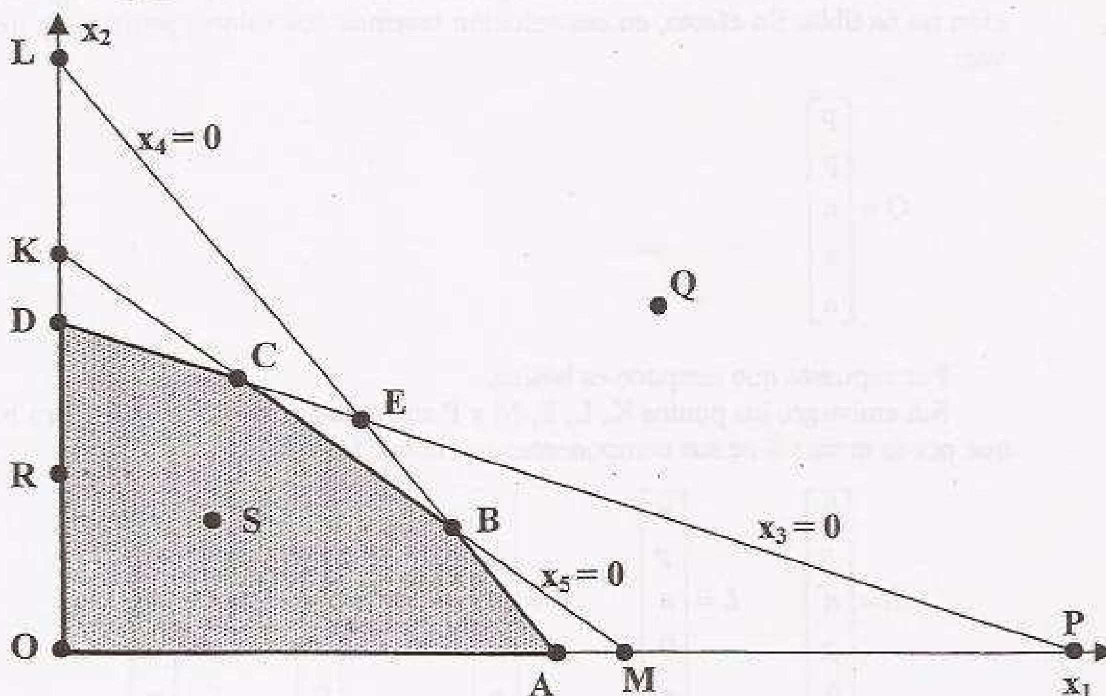
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Indicaremos cada valor positivo con una "p", cada valor negativo con una "n" y cada valor nulo con un 0. Volvamos al Ejemplo 1.1, cuyo gráfico se muestra a continuación.

Cualquier punto que se encuentre dentro del polígono, incluyendo sus bordes y vértices, es una solución factible, tales como S, R y C, y tiene la particularidad de que todos sus componentes son no negativos.

El punto S es una solución factible pero no constituye una base ya que todas las variables que lo integran tienen valores distintos de cero.

$$S = \begin{bmatrix} p \\ p \\ p \\ p \\ p \end{bmatrix}$$



Una solución como el punto R (que está sobre un lado del polígono) es factible pero tampoco constituye una solución básica debido a que sólo tiene un componente igual a cero (x_1):

$$R=\begin{bmatrix}0\\p\\p\\p\\p\end{bmatrix}$$

El punto D, en cambio, representa una solución básica ya que dos variables son nulas ($x_3 = 0$ y $x_1 = 0$) y además es factible al ser todos los valores de las variables no negativos. Del mismo modo también son soluciones básicas factibles los puntos O, C, B y A.

$$D=\begin{bmatrix}0\\p\\0\\p\\p\end{bmatrix}\quad O=\begin{bmatrix}0\\0\\p\\p\\p\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}p\\p\\0\\p\\0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}p\\p\\p\\0\\0\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}p\\0\\p\\0\\p\end{bmatrix}$$

Como hemos dicho más arriba, un punto fuera del recinto, como el Q, es una solución no factible. En efecto, en esa solución tenemos dos valores positivos y tres negativos:

$$Q=\begin{bmatrix}p\\p\\n\\n\\n\end{bmatrix}$$

Por supuesto que tampoco es básica.

Sin embargo, los puntos K, L, E, M y P son soluciones no factibles pero básicas ya que por lo menos 2 de sus componentes son nulos. En efecto:

$$K=\begin{bmatrix}0\\p\\n\\p\\0\end{bmatrix}\quad L=\begin{bmatrix}0\\p\\n\\0\\n\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}p\\p\\0\\0\\n\end{bmatrix}\quad M=\begin{bmatrix}p\\0\\p\\n\\0\end{bmatrix}\quad P=\begin{bmatrix}p\\0\\0\\n\\n\end{bmatrix}$$

En los problemas de PL las soluciones básicas factibles son vértices del poliedro convexo (en todos ellos se cumple que todos sus componentes son no negativos y de ellos por lo menos n-m son iguales a cero).

Es fácil comprender, por la geometría de los programas lineales, que la solución óptima estará siempre en un vértice del poliedro convexo ya que en un punto extremo es en donde se obtiene el máximo o el mínimo desplazamiento del funcional.

1.7 SOLUCIÓN ANALÍTICA

Hasta aquí hemos visto cómo se resuelve gráficamente un problema sencillo de PL. Intentaremos ahora encontrar la solución analítica de una forma sencilla.

El número total de soluciones básicas (factibles y no factibles) en un problema de programación lineal es la cantidad de combinaciones de "n" tomadas de a "m". En el ejemplo planteado la cantidad de soluciones básicas es 10. En efecto:

$$C_m^n = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$$

Para resolver el problema analíticamente, de las infinitas soluciones posibles se deberían calcular solamente aquellas que constituyan bases, y dentro de estas soluciones básicas se deberían tomar solamente aquellas que sean factibles.

A partir de la forma estándar, es decir el sistema de 3 ecuaciones y 5 incógnitas

MAX:	$400\,x_1 + 300\,x_2$
Sujeto a:	$9\,x_1 + 18\,x_2 + x_3 = 720$
	$16\,x_1 + 8\,x_2 + x_4 = 640$
	$10\,x_1 + 10\,x_2 + x_5 = 480$
con	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ y continuas

se forman las 10 bases posibles (es decir sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y se resuelven). Aquellas soluciones en donde alguna variable sea negativa se descartan por ser no factibles. Para las soluciones factibles se calcula el valor del funcional. La solución óptima será aquella cuyo valor del funcional es máximo.

A continuación se procederá de la forma indicada y, para una mejor comprensión se indicará cuál es el punto de la formulación gráfica que se está calculando:

VARIABLES ANULADAS	SISTEMA DE ECUACIONES	SOLUCIÓN	FUNCIONAL	PUNTO
x_1 ; x_2	$x_3 = 720$ $x_4 = 640$ $x_5 = 480$	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 720$ $x_4 = 640$ $x_5 = 480$	Z = 0	O
x_1 ; x_3	$18\,x_2 = 720$ $8\,x_2 + x_4 = 640$ $10\,x_2 + x_5 = 480$	$x_1 = 0$ $x_2 = 40$ $x_3 = 0$ $x_4 = 320$ $x_5 = 80$	Z = 12000	D
x_1 ; x_5	$18\,x_2 + x_3 = 720$ $8\,x_2 + x_4 = 640$ $10\,x_2 = 480$	$x_1 = 0$ $x_2 = 48$ $x_3 = -144$ $x_4 = 256$ $x_5 = 0$	NO FACTIBLE	K

$x_1 ; x_4$	$18x_2 + x_3 = 720$ $8x_2 = 640$ $10x_2 + x_5 = 480$	$x_1 = 0$ $x_2 = 80$ $x_3 = -720$ $x_4 = 0$ $x_5 = -320$	NO FACTIBLE	L
$x_3 ; x_5$	$9x_1 + 18x_2 = 720$ $16x_1 + 8x_2 + x_4 = 640$ $10x_1 + 10x_2 = 480$	$x_1 = 16$ $x_2 = 32$ $x_3 = 0$ $x_4 = 128$ $x_5 = 0$	Z = 16000	C
$x_3 ; x_4$	$9x_1 + 18x_2 = 720$ $16x_1 + 8x_2 = 640$ $10x_1 + 10x_2 + x_5 = 480$	$x_1 = 26.67$ $x_2 = 26.67$ $x_3 = 0$ $x_4 = 0$ $x_5 = -53.33$	NO FACTIBLE	E
$x_4 ; x_5$	$9x_1 + 18x_2 + x_3 = 720$ $16x_1 + 8x_2 = 640$ $10x_1 + 10x_2 = 480$	$x_1 = 32$ $x_2 = 16$ $x_3 = 144$ $x_4 = 0$ $x_5 = 0$	Z = 17600	B
$x_4 ; x_2$	$9x_1 + x_3 = 720$ $16x_1 = 640$ $10x_1 + x_5 = 480$	$x_1 = 40$ $x_2 = 0$ $x_3 = 360$ $x_4 = 0$ $x_5 = 80$	Z = 16000	A
$x_2 ; x_3$	$9x_1 = 720$ $16x_1 + x_4 = 640$ $10x_1 + x_5 = 480$	$x_1 = 80$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ $x_4 = -640$ $x_5 = -320$	NO FACTIBLE	P
$x_2 ; x_5$	$9x_1 + x_3 = 720$ $16x_1 + x_4 = 640$ $10x_1 = 480$	$x_1 = 48$ $x_2 = 0$ $x_3 = 288$ $x_4 = -128$ $x_5 = 0$	NO FACTIBLE	M

Resulta obvio que esta forma de resolver problemas de PL es ineficiente y compleja, y tanto más cuanto más variables tenga el problema. En estos casos se debe utilizar un algoritmo de resolución que permita explorar solamente algunas soluciones básicas factibles en forma procedural y eficiente para llegar a la solución óptima.

1. 8 PROBLEMAS DE MINIMIZACIÓN

Se resolverá a continuación un problema de minimización en forma gráfica.

Ejemplo 1.2

Una empresa produce sacos para la preparación de cemento usando los ingredientes A y B. Cada kilo de ingrediente A cuesta $ 6 y contiene 4 unidades de arena fina, 3 unidades de arena gruesa y 6 unidades de pedregullo. Por su parte, cada kilo de ingrediente B cuesta $ 7 y contiene 3 unidades de arena fina, 5 unidades de arena gruesa y 2 unidades de pedregullo. Cada saco debe contener por lo menos 11 unidades de arena fina, 10 unidades de arena gruesa y 9 unidades de pedregullo.

Llamaremos x_1 y x_2 a la cantidad de ingrediente A (en Kg) y de ingrediente B (en Kg) que debe contener cada saco. Las restricciones que se deben satisfacer son las cantidades mínimas de arena fina (AF), arena gruesa (AG) y pedregullo (PE) requeridas para un saco de producto. En consecuencia, la formulación matemática del problema lineal es la siguiente:

MIN:	$6 x_1 + 7 x_2$
Sujeto a:	AF) $4 x_1 + 3 x_2 \geq 11$
	AG) $3 x_1 + 5 x_2 \geq 10$
	PE) $6 x_1 + 2 x_2 \geq 9$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

Graficando las rectas de las restricciones, tendremos que

- En AF: Para $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 3.67$ y para $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2.75$
- En AG: Para $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$ y para $x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3.33$
- En PE: Para $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4.5$ y para $x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1.5$

En todas las restricciones, se observa que el origen de coordenadas no las satisface, por lo que los semiplanos correspondientes son los superiores.

Para determinar la recta del funcional en Z = 0, se determinan dos puntos:

- Para $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ y para $x_2 = 0.6 \Rightarrow x_1 = -0.7$

Como se trata de minimizar el funcional, se deberá desplazar la recta lo menos posible hacia valores positivos de x_1 y x_2.

Se puede transformar el sistema de inecuaciones en un sistema de ecuaciones agregando las variables *slacks* superfluas x_3, x_4 y x_5, que representan los excedentes sobre los mínimos impuestos de arena fina, arena gruesa y pedregullo, respectivamente.

De la resolución gráfica surge que el óptimo se obtiene en

$x_1 = 2.27$

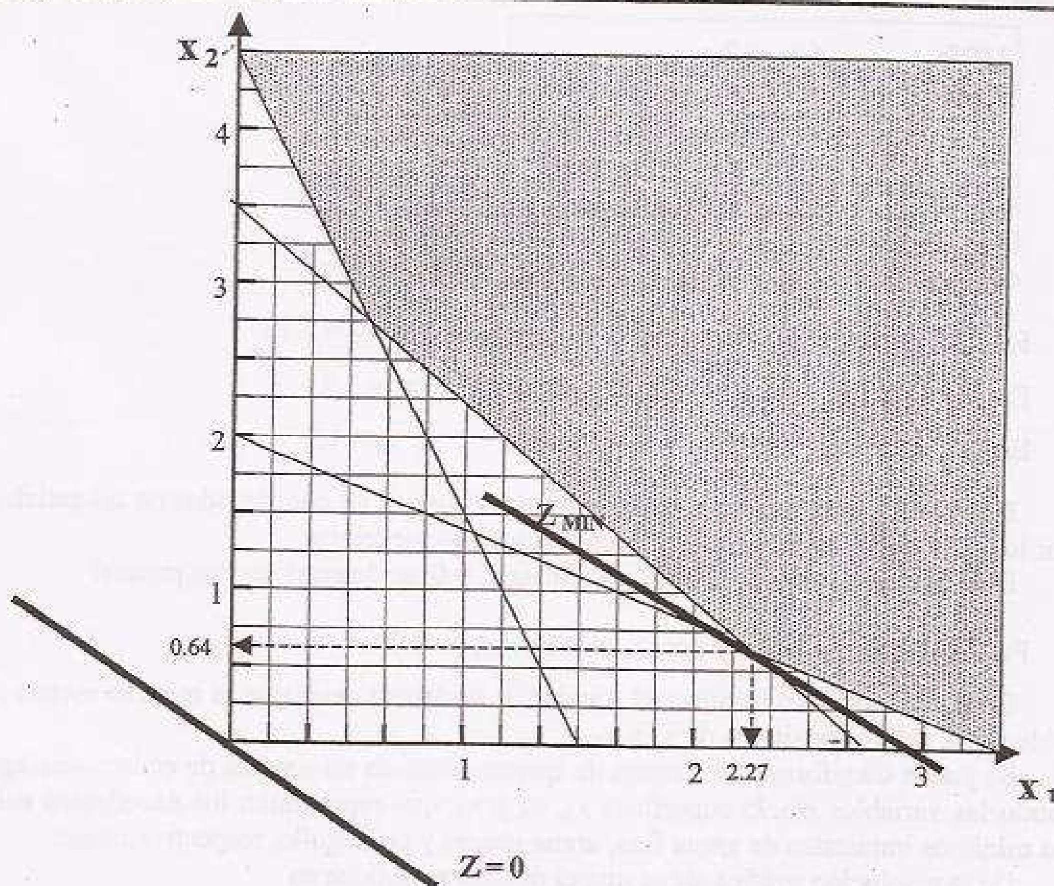
$x_2 = 0.64$

$x_3 = 0$

$x_4 = 0$

$x_5 = 5.91$

En consecuencia, la solución óptima del problema es preparar cada bolsa con 2.27 Kg de A y 0.64 Kg de B, la que tendrá un costo de $ 18.09. Cada bolsa contendrá 11 unidades de arena fina, 10 de arena gruesa y 14.91 de pedregullo.


X₂
4
3
2
1
0.64
Z MIN
1
2
2.27
3
X₁
Z=0

CAPÍTULO 2

RESOLUCIÓN DE PROGRAMAS LINEALES

2.1 ALGORITMO DEL *SIMPLEX*

Básicamente, el método *Simplex* es un procedimiento iterativo para resolver problemas de PL cuando todas las variables que intervienen en el problema son no negativas y cuando los términos independientes (RHS) son también no negativos, es decir, problemas del siguiente tipo:

MAX (o MIN): $\sum c_j \cdot x_j$
Sujeto a: $\sum a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$ [o también $\sum a_{ij} \cdot x_j = b$, $\sum a_{ij} \cdot x_j \geq b$]
siendo: $b_i \geq 0$
y con: $x_j \geq 0$ y continuas

Como todo algoritmo, el procedimiento requiere un criterio de comienzo, un criterio de iteración y un criterio de terminación. El primer paso comprende la obtención de una solución básica factible; normalmente se toma el origen de coordenadas como primera solución. El proceso iterativo consiste en pasar de una solución básica factible (o "base") a otra solución básica factible en forma tal que el funcional mejore (es decir que se incremente si se está maximizando, o que se reduzca si se está minimizando) o que por lo menos se mantenga en el mismo valor. El proceso continúa hasta que se alcanza una solución óptima, si existe.

El método propone la utilización de tablas, una para cada base que se va explorando. Las tablas del *Simplex* tienen el siguiente formato:

		c_j	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
Z =								$z_j - c_j$

Las variables x_k son las variables que no se han anulado para formar la base, es decir las que tienen típicamente un valor distinto a cero (están activadas). Se dice que estas variables son "básicas", o que están en la base. Por el contrario, las variables que se anulan para formar una solución básica se llaman "no básicas". En la columna B_k se consignan los valores b_i que adoptan las variables básicas en la solución.

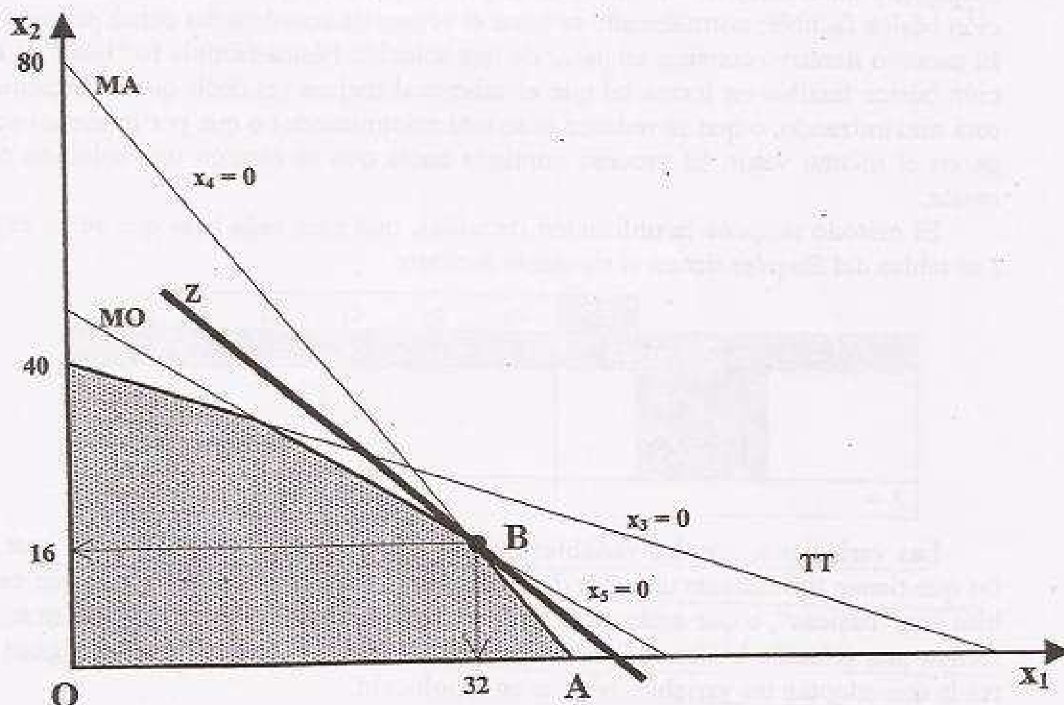
En la parte principal de la tabla va la matriz de coeficientes tecnológicos de la formulación lineal correspondiente a esa base. Esto es, en cada una de las columnas se indican los coeficientes de cada vector A_j asociado a la variable x_j correspondiente.

En la fila superior de la primera tabla solamente, se indican los coeficientes del funcional correspondiente a cada variable. En la primera columna (la dispuesta más a la izquierda) se consignan sólo los coeficientes del funcional correspondientes a las variables básicas. El valor del funcional Z se indica en la última fila, en el extremo izquierdo. Más adelante se explicará qué valores se consignan en la última columna (dispuesta sobre el extremo derecho) con el título b_i/a_{ij}, y cuáles en la fila denominada z_j-c_j.

Desarrollaremos el método conjuntamente con el ejemplo 1.1 del problema de tratamiento térmico, maquinaria y mano de obra. La formulación original del problema es la siguiente:

MAX:	$400\,x_1 + 300\,x_2$
Sujeto a:	$9\,x_1 + 18\,x_2 \leq 720$
	$16\,x_1 + 8\,x_2 \leq 640$
	$10\,x_1 + 10\,x_2 \leq 480$
con:	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

y el gráfico correspondiente:



El algoritmo consiste en los siguientes pasos o etapas:

Primero: Formular el problema en la forma estándar, es decir, agregando las variables *slacks* cuando haya desigualdades en la formulación original.

MAX:	$400\,x_1 + 300\,x_2$		
Sujeto a:	$9\,x_1 + 18\,x_2 + x_3$		$= 720$
	$16\,x_1 + 8\,x_2 \quad + x_4$		$= 640$
	$10\,x_1 + 10\,x_2 \quad\quad + x_5$		$= 480$
con	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq$ ● y continuas		

<u>Segundo:</u> Plantear una solución básica factible. El algoritmo propone como primera solución básica factible el origen de coordenadas, es decir, la solución en donde se anulan las variables reales (x_1 y x_2). Esto significa que en la primera base estarán en la solución x_3, x_4 y x_5, cuyos valores son 720, 640 y 480, respectivamente. A estas variables, entonces, se las llama básicas (o se dice que están en la base).

En el cuerpo principal de la tabla se consignan los coeficientes tecnológicos de la formulación estándar del problema. En la primera fila (c_j) se indican los coeficientes del funcional para cada variable (400, 300, 0, 0 y 0), y en la columna c_k se consignan solamente los coeficientes del funcional de las variables básicas.

Primera tabla		c_j	400	300	●	●	●	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	720	9	18	1			
0	x_4	640	16	8		1		
0	x_5	480	10	10			1	
	Z =							z_j-c_j

Cuando no se indican valores en el cuerpo principal de la tabla se supone que éstos son cero. Observemos que los A_k, es decir los vectores correspondientes a las variables básicas son versores.

En primer lugar, se calcula el valor del funcional $Z = \sum c_k\, x_k$ de la solución.

Para la primera base tendremos que

$$Z = 0\,.\,x_3 + 0\,.\,x_4 + 0\,.\,x_5 = 0$$

Este valor se indica en la casilla correspondiente en la parte inferior izquierda.

El resto de los valores de la fila del funcional se denominan z_j-c_j. El valor de z_j es el de la sumatoria de los coeficientes c_k por los a_{ij}:

$$z_j = \sum c_k\, a_{ij}$$

y, por consiguiente:

$$\boxed{z_j - c_j = \sum c_k a_{ij} - c_j}$$

De manera que

$z_1 - c_1 = 0 \cdot 9 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 10 - 400 = -400$

$z_2 - c_2 = 0 \cdot 18 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 10 - 300 = -300$

$z_3 - c_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$

$z_4 - c_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0$

$z_5 - c_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0$

Estos valores se colocan en la última fila de la tabla.

Primera tabla		c_j	400	300	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	720	9	18	1			
0	x_4	640	16	8		1		
0	x_5	480	10	10			1	
Z = 0			-400	-300	0	0	0	z_j-c_j

Como puede observarse, los $z_j - c_j$ correspondientes a los vectores asociados a las variables básicas (A_3, A_4 y A_5) son iguales a cero.

Tercero: Determinar si la solución puede ser mejorada. Si es así, se pasa a explorar una nueva base; en caso contrario, se termina el proceso, correspondiendo la solución óptima a la presente solución.

El criterio para determinar si la solución puede mejorar es el siguiente:

a. En el caso de estar maximizando, si existe un $z_j - c_j$ negativo, el funcional puede aumentar.

b. En el caso de estar minimizando, si existe $z_j - c_j$ positivo, el funcional puede disminuir.

En el ejemplo, en la primera solución existen valores $z_j - c_j$ negativos siendo un problema de maximización; por lo tanto, el funcional puede mejorar si pasamos a la próxima base.

El *Simplex* explora el recinto pasando de la base actual a una base vecina, introduciendo una variable a la base (es decir activando una de las variables nulas) y sacando una variable de la base (es decir anulando una de las variables que están en la base). Recordemos que una base consiste en una solución que tiene por lo menos n–m variables nulas, de manera que si se activa una variable, se tiene que desactivar otra variable.

Cuarto: Elegir una variable para que salga de la base que constituirá la próxima solución y otra variable para que entre en dicha base.

El criterio para determinar la variable que ingresa a la base es el siguiente:

1. En el caso de estar maximizando, se deberá ingresar la variable cuyo $z_j - c_j$ sea más negativo. En el caso de que haya un empate puede elegirse cualquiera de ellas.
2. En el caso de estar minimizando, se deberá ingresar la variable cuyo $z_j - c_j$ sea más positivo. En el caso de que haya un empate puede elegirse cualquiera de ellas.

En nuestro ejemplo, el $z_j - c_j$ más negativo es el correspondiente a la variable x_1 con un valor igual a –400. En consecuencia, se selecciona a x_1 para que ingrese en la próxima base.

Para determinar la variable que debe salir de la base, se calculan los coeficientes b_i/a_{ij} de la columna correspondiente a la variable j que está ingresando. Estos valores se consignan en la columna ubicada más a la derecha de la tabla, como se indica a continuación:

Primera tabla		c_j	400	300	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	720	9	18	1			80
0	x_4	640	16	8		1		40 ←
0	x_5	480	10	10			1	48
Z = 0			-400	-300	0	0	0	z_j-c_j
			↑					

Al mínimo cociente b_i/a_{ij} no negativo se lo llama θ, y representa el valor que asumirá en la próxima solución la variable ingresante.

$$\theta = \min \frac{b_i}{a_{ij}}$$

En nuestro ejemplo, el mínimo cociente b_i/a_{ij} es el correspondiente a la variable x_4, por lo que ésta será la que se anula en la próxima base. Además, la variable x_1 asumirá el valor 40 en la nueva solución. El coeficiente que corresponde a la columna de la variable que ingresa a la base (x_1) y a la fila de la variable que sale de la base (x_4) se llama "pivote". En el ejemplo, el pivote es 16.

	Primera tabla		c_j	400	300	0	0	0	
	c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
	0	x_3	720	9	18	1			80
⇐	0	x_4	640	16	8		1		40
	0	x_5	480	10	10			1	48
	Z = 0			-400	-300	0	0	0	z_j-c_j
				⇑					

Quinto: Efectuar el cambio de base. Para ello se procede de la siguiente forma:

Las variables que formarán parte de la nueva base son x_3, x_1 (en lugar de x_4) y x_5. Asociados a estas variables, los vectores A_3, A_1 y A_5 son versores.

Segunda tabla								
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3				1			
400	x_1		1					
0	x_5						1	
Z =			0		0		0	z_j-c_j

La fila del pivote se calcula dividiendo los coeficientes de dicha fila de la tabla anterior por el pivote.

Segunda tabla

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3				1			
400	x_1	40	1	0.5		0.0625		
0	x_5						1	
	Z =		0		0		0	z_j-c_j

El resto de los valores se calculan mediante el procedimiento de transformación de matriz inversa de Gauss Jordan. Esto es, para calcular un coeficiente en una posición determinada, se toma de la tabla de la solución anterior el valor ubicado en esa posición y se le resta el cociente entre el producto del coeficiente que está en la fila del pivote por el coeficiente que está en la columna del pivote, y el pivote. Tendremos entonces:

$$B_3 = 720 - \frac{640 \times 9}{16} = 360$$

$$B_5 = 480 - \frac{640 \times 10}{16} = 80$$

$$a_{32} = 18 - \frac{8 \times 9}{16} = 13.5$$

$$a_{52} = 10 - \frac{8 \times 10}{16} = 5$$

$$a_{34} = 0 - \frac{1 \times 9}{16} = -0.5625$$

$$a_{54} = 0 - \frac{1 \times 10}{16} = -0.625$$

Estos valores se consignan en la tabla.

Segunda tabla

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	360		13.5	1	-0.5625		
400	x_1	40	1	0.5		0.0625		
0	x_5	80		5		-0.625	1	
	Z =		0		0		0	z_j-c_j

Luego se calculan los valores de Z y de z_j-c_j. El valor del funcional será:

$$Z = 0 \,.\, 360 + 400 \,.\, 40 + 0 \,.\, 80 = 16000$$

y el de los zj-cj:

$$z_2 - c_2 = 0 \,.\, 13.5 + 400 \,.\, 0.5 + 0 \,.\, 5 - 300 = -100$$

$$z_4 - c_4 = 0 \,.\, (-0.5625) + 400 \,.\, 0.0625 + 0 \,.\, (-0.625) - 0 = 25$$

El resto de los valores (z_1-c_1, z_3-c_3 y z_5-c_5) se pueden calcular del mismo modo, pero como las variables asociadas son básicas, se sabe que van a ser iguales a cero. Todos los valores de z_j-c_j se pueden determinar también por el método de inversión de matrices de Gauss-Jordan.

Los valores calculados se colocan en la tabla:

Segunda tabla

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	360		13.5	1	-0.5625		
400	x_1	40	1	0.5		0.0625		
0	x_5	80		5		-0.625	1	
Z = 16000			0	-100	0	25	0	z_j-c_j

Esta tabla se corresponde al punto A de la solución gráfica que se ha desarrollado anteriormente.

Siguiendo el procedimiento, se vuelve al paso 3 y se sigue hasta llegar a la solución óptima. Para este ejemplo, observamos que aún no se ha encontrado el óptimo, ya que existe aún un valor z_j-c_j negativo, correspondiendo al vector A_2. En consecuencia, deberá ingresar la variable x_2.

Para determinar la variable que debe salir de la base se calculan los coeficientes b_i/a_{ij} y se toma el mínimo no negativo. En la próxima solución saldrá entonces la variable x_5, a la que le corresponde el valor 16 (θ), que será el nivel que asumirá la variable x_2.

Segunda tabla

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	360		13.5	1	-0.5625		26.67
400	x_1	40	1	0.5		0.0625		80
⇐ 0	x_5	80		**5**		-0.625	1	16 ←
Z = 16000			0	-100 ⇑	0	25	0	z_j-c_j

El pivote será ahora 5.

Se procede entonces al cambio de base siendo la próxima solución:

Tercera tabla

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	
400	x_1	32	1			0.125	-0.1	
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	
Z = 17600			0	0	0	12.5	20	z_j-c_j

Se observa ahora que todos los z_j-c_j son no negativos por lo que se ha encontrado la solución óptima. Esta base se corresponde al punto B de la solución gráfica que se ha explicado.

El valor óptimo entonces es fabricar 32 piezas de A y 16 piezas de B por mes, lo que daría una utilidad mensual de $ 17600. El sobrante de TT sería de 144 hs por mes, mientras que los recursos MA y MO estarían siendo utilizados completamente (ya que x_4 y x_5 son igual a cero en la solución óptima).

A continuación se expondrán juntas las tres tablas del *Simplex*, tal como se irían calculando y completando a medida que se va aplicando el algoritmo:

			c_j	400	300	0	0	0	
	c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{i1}
	0	x_3	720	9	18	1			80
⇐	0	x_4	640	**16**	8		1		40
	0	x_5	480	10	10			1	48
	Z = 0			-400	-300	0	0	0	z_j-c_j
				⇑					
	0	x_3	360		13.5	1	-0.5625		26.67
	400	x_1	40	1	0.5		0.0625		80
⇐	0	x_5	80		**5**		-0.625	1	16
	Z = 16000			0	-100	0	25	0	z_j-c_j
					⇑				
	0	x_3	144			1	1.125	-2.7	
	400	x_1	32	1			0.125	-0.1	
	300	x_2	16		1		-0.125	0.2	
	Z = 17600			0	0	0	12.5	20	z_j-c_j

Se explicará y justificará ahora el procedimiento en forma genérica para un problema de maximización con dos variables reales y tres variables débiles. Como se ha indicado, el algoritmo resuelve problemas en donde todas las variable son continuas y no negativas y los términos independientes no negativos. En consecuencia, haremos esa suposición.

En primer lugar, el modelo se debe formular en su forma estándar:

MAX $\quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5$

Sujeto a:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 \qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad + x_4 \qquad = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \qquad\qquad + x_5 = b_3 \end{cases}$$

El *Simplex* propone como primera solución básica a la que surge de anular todas las variables reales, o sea el origen de coordenadas:

$$\begin{cases} x_3 \qquad\qquad = b_1 \\ \qquad x_4 \qquad = b_2 \\ \qquad\qquad x_5 = b_3 \end{cases}$$

Podemos expresar esta primera solución como combinación lineal de los vectores básicos (A_3, A_4 y A_5).

$$B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

cuyo funcional es $Z^{(1)} = c_3\, x_3 + c_4\, x_4 + c_5 x_5$. Si la contribución de las variables *slacks* en el funcional es cero, el valor de la función objetivo para la primera solución es cero.

En general, cualquier solución se puede expresar como una combinación de los vectores que están en la base:

$$\boxed{B = \sum_{1}^{m} A_k x_k} \qquad (2.1)$$

La función objetivo correspondiente a una solución cualquiera, como por ejemplo la primera, se puede expresar como la sumatoria de los coeficientes del funcional de las variables básicas multiplicados por dichas variables básicas:

$$\boxed{Z^{(1)} = \sum_{1}^{m} c_k x_k} \qquad (2.2)$$

Cualquier vector que no esté en la base también se puede expresar como combinación lineal de los vectores que están en la base. En la primera solución, los vectores que no están en la base son A_1 y A_2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\boxed{A_j = \sum_{1}^{m} a_{ij} A_k} \qquad (2.3)$$

Para pasar a otra solución, el algoritmo propone ingresar una variable actualmente inactiva y desactivar una de las variables básicas. El criterio para seleccionar la variable a ingresar a la base es seleccionar aquella que mejor contribuye a la función objetivo.

Suponiendo que $c_1 > c_2$, la variable que se ingresa es x_1. Agregando la variable x_1 al sistema de ecuaciones tendremos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + x_3 \qquad\qquad = b_1 \\ a_{21}x_1 \qquad + x_4 \qquad = b_2 \\ a_{31}x_1 \qquad\qquad + x_5 = b_3 \end{cases}$$

Para que quede una solución básica se debe eliminar una de las variables básicas (x_3, x_4 o x_5) de este sistema de ecuaciones.

El valor de x_1 debe ser tal que permita que se anule sólo una de ellas dejando al resto no negativas:

$$\begin{cases} x_3 = b_1 - a_{11}x_1 \geq 0 \\ x_4 = b_2 - a_{21}x_1 \geq 0 \\ x_5 = b_3 - a_{31}x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Despejando x_1 de todas las inecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 \leq \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_1 \leq \dfrac{b_2}{a_{21}} \\ x_1 \leq \dfrac{b_3}{a_{31}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_1 = min\frac{b_i}{a_{ij}} = \theta}$$

Este es entonces el criterio para seleccionar la variable que se va de la base en el procedimiento del *Simplex* (aquella que se corresponde con el mínimo cociente b_i/a_{ij}).

Tomando ahora la expresión (2.3) y multiplicando miembro a miembro por θ, tendremos:

$$\theta\ A_j = \theta \sum_1^m a_{ij} A_k$$

Sumando y restando a (2.1):

$$B = \sum_1^m A_k x_k + \theta\ A_j - \theta \sum_1^m a_{ij} A_k$$

y sacando A_k como factor común, tendremos la expresión de la nueva solución:

$$B = A_j\ \theta + \sum_1^m A_k (x_k - \theta\ a_{ij})$$

cuyo valor de funcional es:

$$Z^{(2)} = c_j\ \theta + \sum_1^m c_k (x_k - \theta\ a_{ij})$$

Aplicando primero propiedad distributiva y teniendo en cuenta la expresión (2.2), tendremos

$$Z^{(2)} = c_j\ \theta + \sum_1^m c_k x_k - \sum_1^m \theta\ c_k a_{ij} = c_j\ \theta + Z^{(1)} - \sum_1^m \theta\ c_k a_{ij}$$

y sacando θ como factor común:

$$Z^{(2)} = Z^{(1)} - \theta \left[\sum_1^m c_k a_{ij} - c_j \right]$$

Llamando: $z_j = \sum_1^m c_k a_{ij}$

resulta:

$$Z^{(2)} = Z^{(1)} - \theta \left[z_j - c_j\right]$$

En forma general, tendremos que para una solución de un paso P cualquiera, el valor del funcional es igual al valor del funcional del paso anterior (P-1) al que se le resta el producto entre θ y (z_j-c_j).

$$\boxed{Z^{(P+1)} = Z^{(P)} - \theta \left[z_j - c_j\right]} \qquad (2.4)$$

Teniendo en cuenta que θ es siempre no negativo (es el valor que asume la variable candidata a entrar en la solución), en el caso de estar maximizando el funcional mejorará (es decir, aumentará) si existe alguna variable no básica x_j para la cual la diferencia (z_j-c_j) sea negativa. Del mismo modo, en un problema de minimización, el funcional mejorará (es decir, disminuirá) si hay alguna variable no básica x_j en esa solución para la cual la diferencia (z_j-c_j) sea positiva.

La expresión (2.4) también nos da el criterio para seleccionar la variable que debe ingresar a la base, es decir aquella cuyo (z_j-c_j) sea más negativo si se está maximizando o más positivo si se está minimizando.

Finalmente, dicha expresión permite establecer el criterio de finalización del algoritmo. Si no existe ningún valor (z_j-c_j) para el cual el funcional pueda mejorar, el proceso se termina.

2.2 SIGNIFICADO DE LA FORMULACIÓN DE LAS TABLAS DEL *SIMPLEX*

Las diferentes tablas del *Simplex* constituyen el mismo sistema de ecuaciones al que se le van haciendo transformaciones lineales. En efecto, la primera tabla del *Simplex*

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	720	9	18	1		
0	x_4	640	16	8		1	
0	x_5	480	10	10			1
Z = 0			- 400	- 300	0	0	0

representa a un sistema de ecuaciones correspondiente a las condiciones de vínculo de la formulación estándar del problema al que se le agrega una ecuación en donde se expresa el funcional como una variable.

$$\begin{cases} 9x_1 + 18x_2 + x_3 = 720 \\ 16x_1 + 8x_2 + x_4 = 640 \\ 10x_1 + 10x_2 + x_5 = 480 \\ Z - 400x_1 - 300x_2 = 0 \end{cases}$$

Anulando x_1 y x_2 y resolviendo se tiene que:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 720 \\ 640 \\ 480 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad z = 0$$

La segunda tabla del *Simplex*:

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	360		13.5	1	-0.5625	
400	x_1	40	1	0.5		0.0625	
0	x_5	80		5		-0.625	1
Z = 16000			0	-100	0	25	0

representa un sistema de ecuaciones lineales, que es el mismo que el anterior, al que se han hecho transformaciones lineales de manera tal de obtener un coeficiente 1 para x_1 en una ecuación (la del pivote) y cero en el resto de las ecuaciones.

$$\begin{cases} 13.5x_2 + x_3 - 0.5625x_4 = 360 \\ x_1 + 0.5x_2 + 0.0625x_4 = 40 \\ 5x_2 - 0.6250x_4 + x_5 = 80 \\ Z - 100x_2 + 25x_4 = 16000 \end{cases}$$

Anulando x_2 y x_4 y resolviendo se tiene que:

$$x = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 360 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad z = 16000$$

Finalmente, la última tabla (correspondiente a la solución óptima)

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	144			1	1.125	-2.7
400	x_1	32	1			0.125	-0.1
300	x_2	16		1		-0.125	0.2
Z = 17600			0	0	0	12.5	20

también representa un sistema de ecuaciones, al que se le han hecho transformaciones lineales para obtener un 1 en la última fila y un cero en las otras, que se indica a continuación:

$$\begin{cases} x_3 + 1.1250x_4 - 2.7x_5 = 144 \\ x_1 + 0.125x_4 - 0.1x_5 = 32 \\ x_2 - 0.1250x_4 + 0.2x_5 = 16 \\ Z + 12.5x_4 + 20x_5 = 17600 \end{cases}$$

Anulando x_4 y x_5 y resolviendo se tiene que:

$$x = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 144 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad z = 17600$$

2. 3 MATRIZ INVERSA

Las restricciones de un problema original de PL en su forma estándar, tal como dijimos anteriormente, se puede expresar como un producto matricial A(n,m) multiplicado por un vector de variables X de "n" dimensiones, resultando dicho producto igual al vector de términos independientes B de "m" dimensiones. Tomemos la formulación del sistema de ecuaciones del problema original del ejemplo:

$$\begin{cases} 9x_1 + 18x_2 + x_3 = 720 \\ 16x_1 + 8x_2 + x_4 = 640 \\ 10x_1 + 10x_2 + x_5 = 480 \end{cases}$$

Una base consiste en un sistema de ecuaciones lineales de "m" variables y "m" incógnitas. Es decir, de las "n" variables del problema (entre las reales y las *slacks*), se anulan "n-m" variables. En consecuencia, el sistema de ecuaciones de una base es el producto matricial de una matriz A (m, m) multiplicada por un vector de variables X (de m dimensiones) igual al vector columna de términos independientes B:

$$A . X = B$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver por medio de la matriz inversa. En efecto:

$$A^{-1} . A . X = A^{-1} . B$$

$$I . X = A^{-1} . B$$

$$X = A^{-1} . B$$

Por ejemplo, la primera base (origen de coordenadas) consiste en anular las variables x_1 y x_2, lo que resulta en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_3 = 720 \\ x_4 = 640 \\ x_5 = 480 \end{cases}$$

La matriz A en este caso particular es una matriz identidad, de manera que la formulación del producto matricial A . X = B de la primera base es:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}720\\640\\480\end{pmatrix}$$

La solución de este sistema de ecuaciones X = A^{-1}. B es:

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}720\\640\\480\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}720\\640\\480\end{pmatrix}$$

La segunda base del *Simplex* consiste en activar x_1 y desactivar x_4, por lo que el sistema de ecuaciones original quedaría:

$$\begin{cases}x_3 + 9x_1 = 720\\ +16x_1 = 640\\ +10x_1 + x_5 = 480\end{cases}$$

La formulación A.X = B de esta base es:

$$\begin{pmatrix}1 & 9 & 0\\0 & 16 & 0\\0 & 10 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_3\\x_1\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}720\\640\\480\end{pmatrix}$$

y la solución de este sistema de ecuaciones X = A^{-1}. B es:

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_1\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -0.5625 & 0\\0 & 0.0625 & 0\\0 & -0.625 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}720\\640\\480\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}360\\40\\80\end{pmatrix}$$

La siguiente base consistía en anular del sistema original a las variables x_4 y x_5.

$$\begin{cases}x_3 + 9x_1 + 18x_2 = 720\\ +16x_1 + 8x_2 = 640\\ +10x_1 + 10x_2 = 480\end{cases}$$

La formulación A.X = B de esta base es:

$$\begin{pmatrix}1 & 9 & 18\\0 & 16 & 8\\0 & 10 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_3\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}720\\640\\480\end{pmatrix}$$

y la solución de este sistema de ecuaciones X = A^{-1}. B es:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1.125 & -2.7 \\ 0 & 0.125 & -0.1 \\ 0 & -0.125 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 720 \\ 640 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ 32 \\ 16 \end{pmatrix}$$

En el *Simplex*, la matriz inversa de una base cualquiera es la que se encuentra por debajo de la matriz identidad de la primera tabla. Esa matriz es la inversa de la que se halla por encima de la matriz identidad de ese paso en la primera tabla.

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	720	9	18	1		
0	x_4	640	16	8		1	
0	x_5	480	10	10			1
Z = 0			-400	-300	0	0	0

0	x_3	360		13.5	1	-0.5625	
400	x_1	40	1	0.5		0.0625	
0	x_5	80		5		-0.625	1
Z = 16000			0	-100	0	25	0

0	x_3	144			1	1.125	-2.7
400	x_1	32	1			0.125	-0.1
300	x_2	16		1		-0.125	0.2
Z = 17600			0	0	0	12.5	20

La matriz inversa del segundo paso es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5625 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 \\ 0 & -0.625 & 1 \end{pmatrix}$$

que es la inversa de la que está por encima de la matriz identidad del segundo paso en la primera tabla (vectores A_3, A_1, A_5):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la matriz inversa del tercer paso es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1.125 & -2.7 \\ 0 & 0.125 & -0.1 \\ 0 & -0.125 & 0.2 \end{pmatrix}$$

que es la inversa de la que está por encima de la matriz identidad del tercer paso en la primera tabla (vectores A_3, A_1, A_2):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 9 & 18\\ 0 & 16 & 8\\ 0 & 10 & 10\end{pmatrix}$$

La ventaja de la matriz inversa es que cualquier vector transformado para ese paso se puede calcular como el producto de la matriz inversa por el vector de la primera tabla. Por ejemplo, el vector B de la última tabla, es decir la solución del tercer paso, se puede calcular multiplicando:

$$A^{-1}\,B=\begin{pmatrix}1 & 1.125 & -2.7\\ 0 & 0.125 & -0.1\\ 0 & -0.125 & 0.2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}720\\ 640\\ 480\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}144\\ 32\\ 16\end{pmatrix}$$

Del mismo modo, cualquier otro vector transformado se puede calcular multiplicando la matriz inversa por ese vector en la primera tabla. Tomemos el vector A_1:

$$A^{-1}\,A_1=\begin{pmatrix}1 & 1.125 & -2.7\\ 0 & 0.125 & -0.1\\ 0 & -0.125 & 0.2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\ 16\\ 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

2.4 BASES ARTIFICIALES

Al aplicar el algoritmo del *Simplex* en un problema en el cual existen restricciones de mayor o igual en la formulación original se presenta una situación especial cuando el término independiente es distinto de cero. En efecto, supongamos la siguiente restricción:

$x_1 + x_2 \geq 20$

Para utilizar el método, esta inecuación debe transformarse en una ecuación restando una variable superflua no negativa x_3:

$x_1 + x_2 - x_3 = 20$

Como hemos comentado, el *Simplex* toma como primera base a aquella que anula las variables reales, por lo que en esa primera solución quedaría que $x_3 = -20$, lo que vulnera el principio de no negatividad de las variables.

Para salvar este inconveniente, se utilizan las denominadas variables artificiales. Estas variables se agregan a la igualdad con coeficiente +1:

$x_1 + x_2 - x_3 + \mu_1 = 20$

Como se está agregando una nueva variable al problema, también se debe anular una variable más para formar una base. El algoritmo del *Simplex* anula en la primera solución a la variable *slack* por la cual se genera la variable artificial.

Una situación que también requiere del planteo de variables artificiales ocurre con las restricciones de igual. Supongamos que la restricción fuera:

$x_1 + x_2 = 15$

Aquí se presentaría una incompatibilidad en la primera base, ya que quedaría que 0 = 15. Para salvar esta situación se agrega una variable artificial:

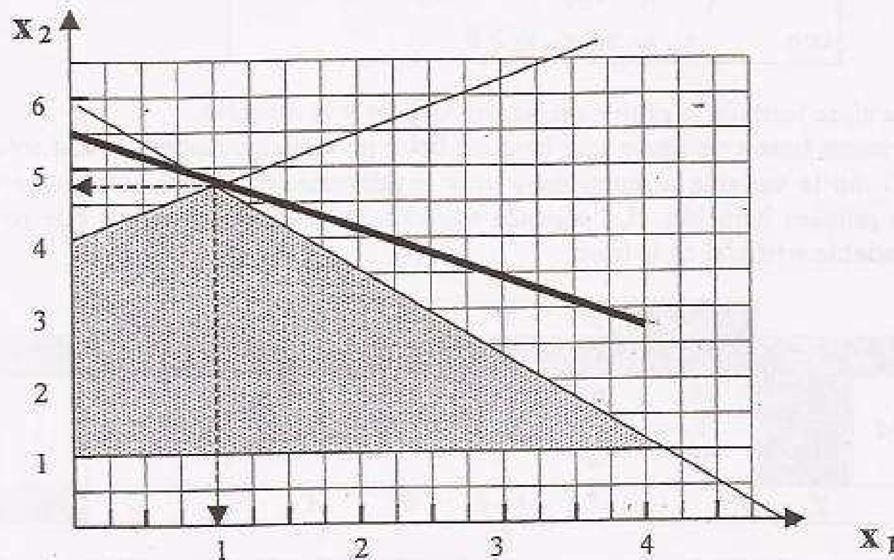
$x_1 + x_2 + \lambda_1 = 15$

Resulta obvio que estas variables deben asumir valor cero en la solución óptima, ya que de lo contrario estaríamos describiendo restricciones diferentes a las reales. Para ello, en el funcional se deben afectar las variables artificiales por un coeficiente M muy grande que contribuya muy contrariamente al objetivo propuesto. En consecuencia, para un problema de maximización, una variable artificial estará afectada en la función objetivo por un coeficiente -M y en un problema de minimización estará afectada por un coeficiente +M (siendo M un valor arbitrariamente alto).

Ejemplo 2.1.

MAX:	$5x_1 + 8x_2$
Sujeto a	$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ x_2 \geq 1 \\ -4x_1 + 5x_2 \leq 20 \end{cases}$
con	$x_1, x_2 \geq 0$

Como podemos observar en la solución gráfica del problema, el origen de coordenadas no es una solución factible.



Para resolver el problema con el algoritmo del *Simplex* se presenta el problema en su forma estándar:

MAX: $5\,x_1 + 8\,x_2$

$$\text{Sujeto a}\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + x_3 & = 30 \\ x_2 \quad - x_4 & = 1 \\ -4x_1 + 5x_2 \quad + x_5 & = 20 \end{cases}$$

con $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Dado que el *Simplex* debe iniciar el proceso en una solución básica factible, se debe generar una base artificial agregando a la segunda restricción una variable artificial y afectando al funcional con dicha variable (en forma muy contraria al objetivo, como hemos visto).

MAX: $5\,x_1 + 8\,x_2 - M\,\mu_1$

$$\text{Sujeto a}\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + x_3 & = 30 \\ x_2 \quad - x_4 \quad + \mu_1 & = 1 \\ -4x_1 + 5x_2 \quad + x_5 & = 20 \end{cases}$$

con $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Ahora sí, se formula la primera tabla del *Simplex* y se resuelve.

La primera base constituye una base artificial porque corresponde a una solución no factible. Como la variable μ_1 contribuye muy negativamente en el funcional, se va de la base en la primera iteración. La segunda solución ya es factible, puesto que no aparece ninguna variable artificial en la base.

			c_j	5	8	0	0		-M	
	c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	μ_1	b_i/a_{ij}
		x_3	30	6	5	1				6
⇐	-M	μ_1	1		1		-1		1	1
		x_5	20	-4	5			1		4
		Z = -M		-5	-M-8	0	M	0	0	z_j-c_j
					⇑					
		x_3	25	6		1	5		-5	5
	8	x_2	1		1		-1		1	-
⇐		x_5	15	-4			5	1	-5	3
		Z = 8		-5	0	0	-8	0	8+M	z_j-c_j
							⇑			
⇐		x_3	10	10		1		-1		1
	8	x_2	4	-0.8	1			0.2		-
		x_4	3	-0.8			1	0.2	-1	-
		Z = 32		-11.4	0	0	0	1.6	M	z_j-c_j
				⇑						
	5	x_1	1	1		0.1		-0.1		
	8	x_2	4.8		1	0.08		0.12		
		x_4	3.8			0.08	1	0.12	-1	
		Z = 43.4		0	0	1.14	0	0.46	M	z_j-c_j

El vector de la variable μ_1 es simétrico con el vector de la variable x_4 que le da origen. En consecuencia, no sería necesario seguir calculando los valores transformados de este vector una vez que se fue de la solución.

Ejemplo 2.2. Restricciones de igual.

Resolver por Simplex *el siguiente programa lineal:*

MAX:	$6\ x_1 + 10\ x_2 + 9\ x_3$
Sujeto a:	$30\ x_1 + 50\ x_2 + 60\ x_3 \leq 1200$
	$20\ x_2 + 15\ x_3 \leq 550$
	$x_1 + x_2 = 20$
con	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Resolución:

Este caso requiere primero el planteo de la forma estándar:

MAX:	$6\ x_1 + 10\ x_2 + 9\ x_3$
Sujeto a:	$30\ x_1 + 50\ x_2 + 60\ x_3 + x_4 = 1200$
	$20\ x_2 + 15\ x_3 + x_5 = 550$
	$x_1 + x_2 = 20$
con	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Como la tercera restricción es una igualdad, se debe agregar una variable artificial λ_1 a fin de poder aplicar el método *Simplex*, generando una base artificial en el origen de coordenadas. Finalmente, se formulan las tablas del *Simplex* para encontrar la solución óptima.

MAX:	$6\ x_1 + 10\ x_2 + 9\ x_3 - M\ \lambda_1$
Sujeto a:	$30\ x_1 + 50\ x_2 + 60\ x_3 + x_4 = 1200$
	$20\ x_2 + 15\ x_3 + x_5 = 550$
	$x_1 + x_2 + \lambda_1 = 20$
con	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

			c_j	6	10	9			-M	
	c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	λ_1	b_i/a_{i1}
	0	x_4	1200	30	50	60	1			24
	0	x_5	550		20	15		1		27.5
⇐	-M	λ_1	20	1	1				1	20
	Z =		-20 M	-6-M	-10-M	-9				$z_j - c_j$
					⇑					

⇐ /	x_4	200	-20		**60**	1		-50	3.33
	x_5	150	-20		15		1	-20	10
10	x_2	20	1	1				1	-
Z =		-200 M	4		-9 ⇑			10+M	z_j-c_j

9	x_3	3.333	-0.333		1	0.017	1	-0.83	
	x_5	100	-15		1	-0.25	1	-7.5	
10	x_2	20	1	1	1	0	1	1	
Z =		230	1			0.15		2.5+M	z_j-c_j

Ejemplo 2.3. Problema de minimización

En la siguiente tabla se indica la contribución vitamínica por gramo de dos ingredientes C_1 y C_2 a un medicamento que requiere 3000 unidades de vitamina A, 250 gr de vitamina B y 90 unidades de vitamina E y el costo por cada gramo de cada uno de ellos. Se requiere determinar qué cantidad de gramos de cada ingrediente se necesita en el medicamento.

	A	B	E	Costo $/gr
C_1	2000	400	100	0,5
C_2	5000	200	100	0,9

Resolución:

Llamando x_1 a la cantidad de ingrediente C_1 y x_2 a la cantidad de ingrediente C_2, en gramos, que se deben incorporar en el medicamento. El planteo del problema es el siguiente:

MIN: $0.5\,x_1 + 0.9\,x_2$

Sujeto a:
VA) $2000\,x_1 + 5000\,x_2 \geq 3000$
VB) $400\,x_1 + 200\,x_2 \geq 250$
VE) $100\,x_1 + 100\,x_2 \geq 90$

con: $x_1, x_2 \geq 0$

Se transforma primero el sistema de inecuaciones en un sistema de ecuaciones, mediante el agregado de variables *slacks* superfluas:

MIN: $0.5\,x_1 + 0.9\,x_2$

Sujeto a:
$2000\,x_1 + 5000\,x_2 - x_3 = 3000$
$400\,x_1 + 200\,x_2 - x_4 = 250$
$100\,x_1 + 100\,x_2 - x_5 = 90$

con: $x_1, x_2, x_3, x_4\, x_5 \geq 0$

y luego se agregan las variables artificiales correspondientes:

MIN:	$0.5\,x_1 + 0.9\,x_2 \qquad + M\,\mu_1 + M\,\mu_2 + M\,\mu_3$
Sujeto a:	$2000\,x_1 + 5000\,x_2 - x_3 \qquad + \mu_1 = 3000$
	$400\,x_1 + 200\,x_2 \quad - x_4 \qquad + \mu_2 = 250$
	$100\,x_1 + 100\,x_2 \qquad - x_5 \qquad + \mu_3 = 90$
con:	$x_1, x_2, x_3, x_4\, x_5 \geq 0$

Se plantea entonces el *Simplex* y se resuelve:

			c_j	0.5	0.9				M	M	M	
	c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	μ_1	μ_2	μ_3	b_i/a_{ij}
⇐	M	μ_1	3000	2000	5000	-1			1			0.6
	M	μ_2	2500	400	200		-1			1		1.25
	M	μ_3	90	100	100			-1			1	0.9
	Z =		5590 M	-0.5 + 2500 M	-0.9 + 5300 M	-M	-M	-M				z_j-c_j
					⇑							

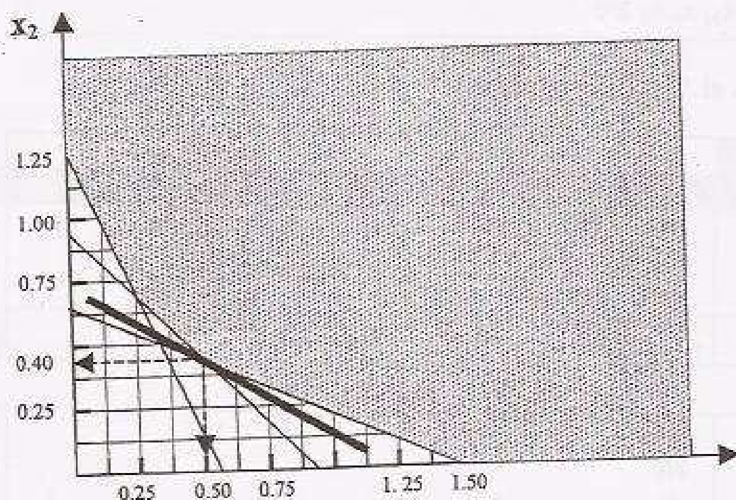
	0.9	x_2	0.6	0.4	1	-0.0002			*			1.5
⇐	M	μ_2	130	320		0.04	-1		*	1		0.4063
	M	μ_3	30	60		0.02		-1	*		1	0.5
	Z =160 M+ 0.54			-0.14 + 380 M		-0.0002 +0.06M	-M	-M	*			z_j-c_j
				⇑								

	0.9	x_2	0.4375		1	-0.0003	0.0012		*	*		350
	0.5	x_1	0.4063	1		0.0001	-0.0031	-	*	*		-
⇐	M	μ_3	5.6250			0.0125	0.1875	-1	*	*	1	30
	Z =5.625 M+ 0.5969					-0.0002 +0.0125M	-0.0004 +0.1875M	-M	*	*		z_j-c_j
							⇑					

	0.9	x_2	0.4		1	-0.0003		0.0067	*	*	*	
	0.5	x_1	0.5	1		0.0003		-0.0167	*	*	*	
		x_4	30			0.0667	1	-5.333	*	*	*	
	Z = 0.61					-0.0001		-0.023	*	*	*	z_j-c_j

Como se trata de un problema de minimización y todos los z_j-c_j son no positivos, la última tabla constituye la solución óptima.

Como hemos mencionado anteriormente, una vez que las variables artificiales dejan la base, no es necesario calcular los coeficientes de los vectores μ_j asociados, ya que sus valores son simétricos a los coeficientes de los vectores que dan origen a la necesidad de formular dichas variables artificiales (es decir μ_1 con x_3, μ_2 con x_4 y μ_3 con x_5).



2.5 INTERPRETACIÓN DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

A partir de la tabla óptima de un problema de PL se puede extraer información físico-económica muy interesante para la toma de decisiones. Diferenciaremos las distintas partes de la tabla, en particular el vector B, los vectores A_j asociados a restricciones, los vectores A_j asociados a actividades y la última fila para cada uno de estos vectores.

1. Vector B. Nos da el nivel de actividad óptimo de las variables que están en la base. En la última fila se tiene el valor del funcional.
2. Vector Aj asociado a una variable *slack* que no esté en la base: Los a_{ij} indican la variación (en el sentido del signo del coeficiente) que se produciría en las variables x_i básicas por cada unidad que se relaja la restricción. Por su parte, los z_j-c_j muestran la variación que se verificaría en el funcional en el sentido de su signo (incremento en el caso de estar maximizando o reducción en el caso de estar minimizando) por cada unidad que se relaja la restricción. Estos valores z_j-c_j relacionados con restricciones se llaman "valores marginales" (o "precios sombra").
3. Vector A_j asociado a una variable "fuerte" que no esté en la base: Los a_{ij} indican la variación (en el sentido contrario al signo del coeficiente) que se produciría en las variables x_i básicas si se activara la variable en una unidad. Por su parte, los z_j-c_j muestran la variación que se verificaría en el funcional en el sentido contrario al signo (reducción en el caso de estar maximizando o aumento en el caso de estar minimizando) por cada unidad que se activara la variable. Estos valores z_j-c_j relacionados con actividades se llaman "costos de oportunidad"(o "costos reducidos").

Ejemplo 2.4

Tomemos la tabla óptima del ejemplo 1.1 de Tratamiento Térmico, Maquinaria y Mano de Obra:

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	
400	x_1	32	1			0.125	-0.1	
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	
Z = 17600			0	0	0	12.5	20	$z_j - c_j$

El mejor resultado, conforme al objetivo planteado, se obtiene produciendo 32 unidades mensuales de la pieza A ($x_1 = 32$) y 16 unidades mensuales de la pieza B ($x_2 = 16$). De esta forma se alcanza un beneficio de $ 17600 por mes.

El sobrante de Tratamiento Térmico es de 144 hs. por mes. Los recursos de Maquinaria y de Mano de Obra están saturados, es decir, se está utilizando toda la disponibilidad ($x_4 = 0$ y $x_5 = 0$).

El valor marginal del recurso Maquinaria es $12.5. Esto significa que por cada hora adicional que se pudiera disponer de ese recurso, el funcional aumentaría $12.5. Dicho de otra forma, se estaría dispuesto a pagar hasta $12.5 por una hora adicional de maquinaria.

Por otra parte, si se pudiera obtener una hora más de maquinaria, el sobrante de Tratamiento Térmico aumentaría en 1.1250 hs. por mes, la producción mensual de A se incrementaría en 0.125 unidades y la producción mensual de B se reduciría en 0.125 unidades.

El valor marginal del recurso Mano de Obra es de $20. Esto es, por cada hora adicional de Mano de Obra que se pudiera conseguir, la función objetivo crecería en $20. Dicho de otra manera, se podría pagar hasta $20 la hora adicional de la mano de obra.

Si se pudiera obtener una hora más de Mano de Obra por mes, el sobrante de tratamiento térmico se reduciría en 2.7 h por mes, la producción mensual de A disminuiría en 0.1 unidades y la producción mensual de B aumentaría en 0.2 unidades.

Resulta obvio que el valor marginal del Tratamiento Térmico es $0, ya que hay sobrante de este recurso en la solución óptima.

Los costos de oportunidad para esta solución son cero, ya que los niveles de actividad de las variables x_1 y x_2 son distintos de cero.

Ejemplo 2.5

A fin de interpretar los vectores relacionados con las variables reales, modifiquemos los datos del ejemplo 1.1 de la siguiente manera:

Utilidad unitaria de A: $500

Utilidad unitaria de B: $240

Manteniendo sin modificar el resto de los parámetros y resolviendo el problema por *Simplex*, tendremos la siguiente solución óptima:

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	360		13.5	1	-0.5625		
500	x_1	40	1	0.5		0.0625		
0	x_5	80		5		-0.6250	1	
Z = 20.000			0	10	0	31.25	0	$z_j - c_j$

En este caso, tal como se desprende de la tabla, lo más conveniente es producir 40 unidades mensuales de A y no producir B. El resultado económico es de $20.000 por mes. El sobrante de Mano de Obra es de 80 hs mensuales, mientras que el de TT es de 360 hs y no existe sobrante de MA.

Los valores del vector A_2 (asociado con la actividad "producción de B" representada por x_2) se interpretan de la siguiente forma: Por cada unidad que se produjera de B, el sobrante de TT se reduciría en 13.5 hs, la producción de A disminuiría en 0,5 piezas y el sobrante de Mano de Obra se reduciría en 5 hs por mes.

El costo de oportunidad de B es de $10. Esto significa que si se produce una unidad de B, el funcional disminuirá en $10. Este valor puede interpretarse también como lo que se debería aumentar como mínimo la contribución de B en el funcional para que convenga producirla. Ello significa que, si la utilidad unitaria de B fuera mayor a $250 (en lugar de los $240 actuales), convendría fabricar piezas B.

Los valores del vector A_4 (asociado con el recurso MA representado por x_4) se interpretan de la siguiente forma: Por cada unidad adicional que se pudiera disponer de MA, el sobrante de TT se reduciría en 0,5625 hs, la producción de A aumentaría en 0.0625 piezas y el sobrante de Mano de Obra se reduciría en 0,625 hs por mes.

El valor marginal de $31.25 significa que por cada unidad adicional que se pudiera conseguir de MA el funcional aumentaría en ese valor, por lo que se estaría dispuesto a pagar $31.25 la hora de este recurso.

2.6 OTROS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PROGRAMAS DE PL

El método *Simplex* constituye el algoritmo de resolución de programas lineales más divulgado. Existen varias modificaciones al método presentado que lo hacen más eficiente, entre las que podemos mencionar el denominado *Simplex* Revisado.

El método *Simplex*, tal como hemos visto, explora el recinto de soluciones factibles por los extremos del poliedro. Es un algoritmo de naturaleza (o tiempo) exponencial en lo que se refiere al número de iteraciones necesario para arribar a la solución óptima.

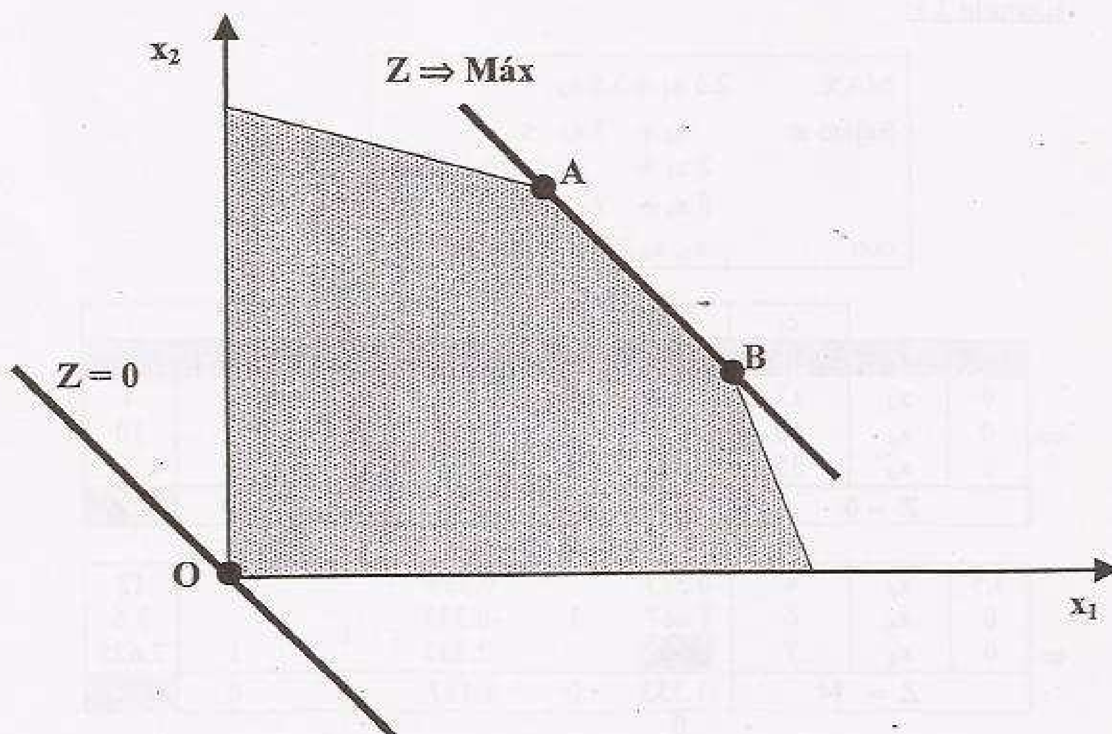
Existen, sin embargo, otros métodos, que son de naturaleza polinomial y que se llaman de "punto interior". Estos algoritmos atraviesan el recinto internamente, para continuar luego la exploración en forma externa. El primer algoritmo de este tipo fue el denominado "elipsoidal" (Khachiyan, 1979), que es muy poco conocido. En el año 1984, N. Karmarkar desarrolló un método que puede competir en eficiencia con el *Simplex*, sobre todo, para problemas de gran envergadura.

CAPÍTULO 3

CASOS PARTICULARES

3.1 SOLUCIONES ALTERNATIVAS

Este caso se da cuando existe más de una solución que optimiza el resultado. Si las variables del problema son continuas, y existe más de una solución, entonces habrá infinitas soluciones alternativas.



En el caso de dos variables reales, se llegará a este tipo de solución si la recta del funcional es paralela a un lado del polígono convexo.

Al buscar el máximo desplazamiento del funcional se observa en la figura que el punto extremo A es óptimo, pero también lo son el punto extremo B y cualquier combinación lineal entre A y B.

En el *Simplex*, se sabe que se ha llegado a una solución alternativa cuando se observa que, habiendo llegado a la solución óptima, hay algún valor z_j-c_j correspondiente a variables no básicas igual a cero.

Un z_j-c_j igual a cero de una variable no básica se llama cero alternativo y se indica como: 0*.

En un problema de dos variables reales, para encontrar el otro punto extremo, también óptimo, se procede a ingresar a la base la variable que tiene el 0* y se saca la que corresponda, conforme al criterio de salida explicado. Cualquier combinación lineal entre los dos puntos extremos óptimos, también es óptima. La expresión general de las soluciones alternativas para dos puntos extremos se puede expresar como:

$$X = X^{(A)} \cdot \alpha + X^{(B)} \cdot (1 - \alpha)$$

siendo $0 \leq \alpha \leq 1$

Es obvio que puede haber más de dos puntos extremos, en problemas de dimensiones superiores a dos variables reales.

Ejemplo 3.1:

MAX:	$2.5\,x_1 + 3.5\,x_2$
Sujeto a:	$x_1 + 3\,x_2 \leq 12$
	$2\,x_1 + x_2 \leq 10$
	$5\,x_1 + 7\,x_2 \leq 35$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

			c_j	2.5	3.5	0	0	0	
	c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
	0	x_3	12	1	3				4
⇐	0	x_4	10	2	1	1	1		10
	0	x_5	35	5	7			1	5
	Z = 0			-2.5	-3.5	0	0	0	z_j-c_j
					⇑				
	3.5	x_2	4	0.333		0.333			12
	0	x_4	6	1.667	1	-0.333	1		3.6
⇐	0	x_5	7	2.667		-2.333		1	2.625
	Z = 14			-1.333	0	1.167	0	0	z_j-c_j
				⇑					
	3.5	x_2	3.125		1	0.625		-0.125	
⇐	0	x_4	1.625			1.125		-0.625	
	2.5	x_1	2.625	1		-0.875	1	0.375	
	Z = 17.5					0*	0	0.5	z_j-c_j
						⇑			
	3.5	x_2	2.2222		1		-0.5556	0.2222	
	0	x_3	1.4444			1	0.8889	-0.5556	
	2.5	x_1	3.8889	1			0.7778	-0.1111	
	Z = 17.5						0*	0.5	z_j-c_j

Observamos que la tercera tabla constituye la solución óptima, ya que todos los z_j-c_j son no negativos; pero hay un cero alternativo, lo que indica que la solución es alternativa.

Para hallar el otro punto extremo se introduce x_3 (la variable que tiene el cero alternativo) y se itera.

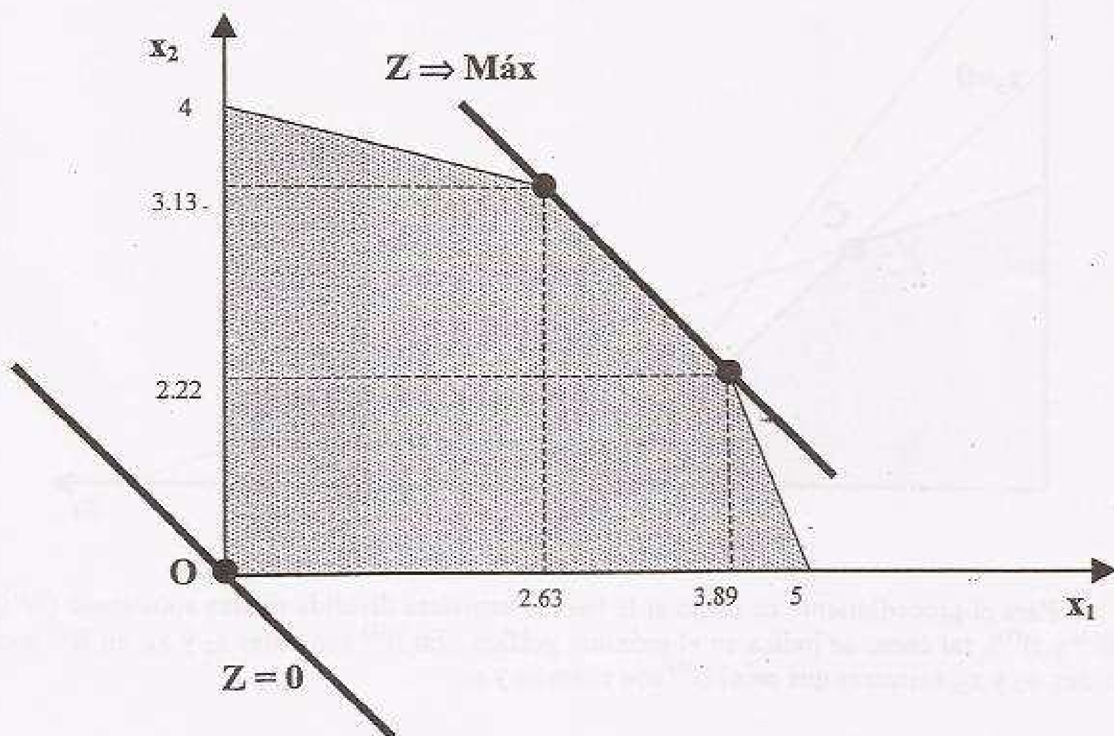
En la nueva solución, el funcional tendrá el mismo valor, ya que pertenece a la misma recta de isobeneficios, y por supuesto que también tendrá un cero alternativo.

El conjunto de infinitas soluciones óptimas se puede expresar entonces como combinación lineal de la tercera y cuarta base:

$$X = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 2.625 \\ 3.125 \\ 0 \\ 1.625 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \cdot \begin{bmatrix} 3.8889 \\ 2.2222 \\ 1.4444 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con α comprendido entre 0 y 1.

La solución gráfica de este problema es la siguiente:



3.2 SOLUCIÓN DEGENERADA

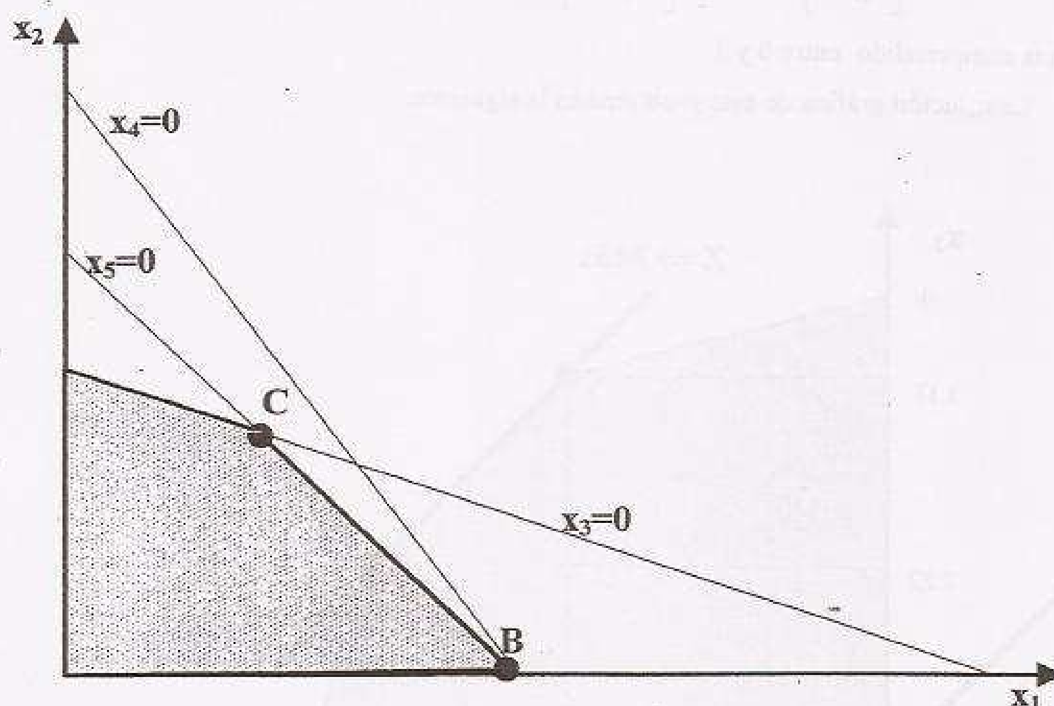
Las soluciones básicas son aquellas que tienen por lo menos "n-m" variables iguales a cero. Las soluciones básicas convencionales tienen exactamente "n-m" variables nulas.

Puede ocurrir, sin embargo, que las bases tengan una cantidad mayor de variables iguales a cero. En estos casos, se dice que las soluciones son "degeneradas" o "degradadas".

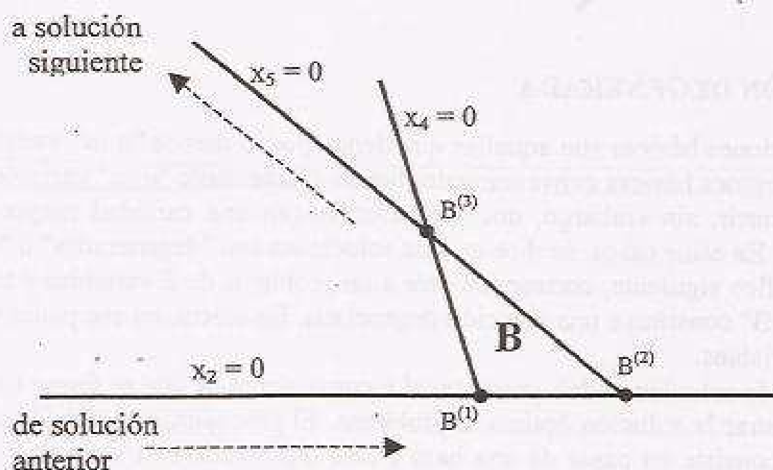
En el gráfico siguiente, correspondiente a un problema de 2 variables y tres restricciones, el punto "B" constituye una solución degenerada. En efecto, en ese punto se encuentran anuladas 3 variables.

Este tipo de solución podría presentar el inconveniente de que se forme un lazo cerrado antes de encontrar la solución óptima al problema. El procedimiento del *Simplex*, tal como hemos visto, consiste en pasar de una base a otra ingresando una variable y sacando otra variable de la base. En el problema graficado, al pasar del origen de coordenadas al punto

B, si el óptimo no se encuentra en este punto, el método debe optar por la eliminación de una de las variables candidatas a salir (x_4 o x_5).

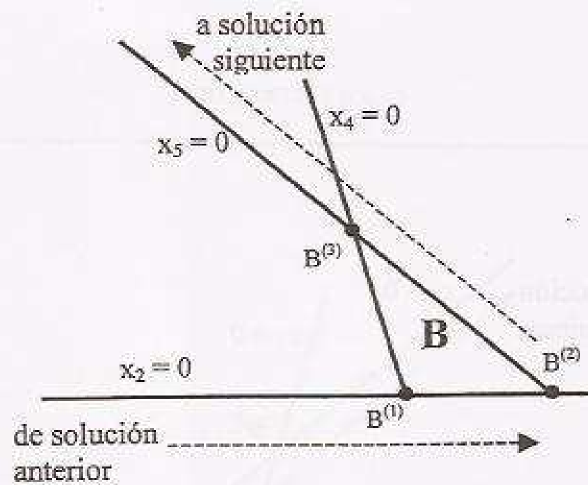


Para el procedimiento es como si la base B estuviera dividida en tres soluciones ($B^{(1)}$, $B^{(2)}$ y $B^{(3)}$), tal como se indica en el próximo gráfico. En $B^{(1)}$ son nulas x_2 y x_4, en $B^{(2)}$ son nulas x_2 y x_5, mientras que en el $B^{(3)}$ son nulas x_4 y x_5.



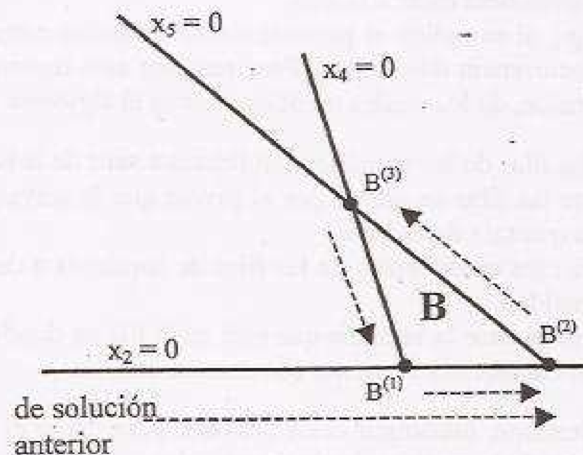
Si se eligiera anular la variable correspondiente a la recta en donde se encuentra la próxima base (o sea x_5), podrían ocurrir dos cosas:

a) que en la siguiente iteración se pase a la próxima base en el proceso de iteración (punto C) como se ve en el siguiente gráfico:



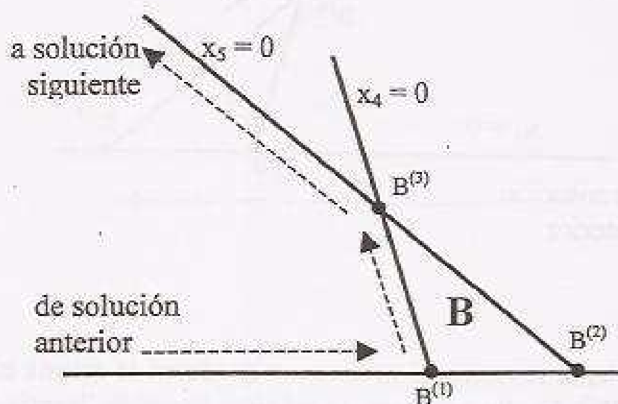
o bien

b) que en la siguiente iteración el proceso se quede en la misma base B; esto es, que se pase al punto $B^{(3)}$. Si ello ocurriera, la próxima iteración llevaría al punto $B^{(1)}$, la próxima al $B^{(2)}$, luego al $B^{(3)}$, y de este modo el ciclo se repetiría indefinidamente sin salir nunca de la solución B.



En realidad la probabilidad de un *loop* es muy baja, pero existe; de manera que habría que evitar que se anule la variable que también es nula en la próxima base del proceso. En este caso no habría que anular primero x_5, ya que en la próxima base (C) también es nula x_5.

Si, en cambio, se elige anular primero la variable que no está desactivada en la próxima solución (en el ejemplo x_4), ocurrirá lo siguiente: Primero se anula x_4 (punto $B^{(1)}$), luego se anula x_5 (punto $B^{(2)}$) y finalmente se cambia de base y se pasa al punto C. De esta forma, se va a iterar dos veces en el punto B, pero nos aseguramos que no se va a entrar en un lazo cerrado.



En el *Simplex*, la solución degenerada se detecta en la base anterior al observar que existe un empate de θ. Esto implica que existe más de una variable candidata a salir (en nuestro ejemplo x_5 y x_4). Si se estuviera resolviendo el *Simplex* en forma manual, se podría elegir cualquiera de ellas. En el eventual caso de que se detecte un *loop* con la elección que se tomó, habrá que seleccionar a la otra.

Sin embargo, si se aplica el procedimiento en forma computarizada, se debe evitar la posibilidad de ocurrencia de un lazo. Para resolver este inconveniente existen varios algoritmos de protección, de los cuales mencionaremos el siguiente a modo de ejemplo:

i) Se toman las filas de las variables candidatas a salir de la base.
ii) Cada una de las filas se divide por el pivote que le correspondería si la variable de la fila fuera la que sale de la base.
iii) Se comparan los coeficientes de las filas de izquierda a derecha hasta encontrar la primera desigualdad.
iv) Debe salir de la base la variable que está en la fila en donde el coeficiente de la primera desigualdad encontrada es menor (de manera absoluta).

Lamentablemente, introducir estos métodos para evitar el ciclaje puede reducir drásticamente la rapidez de la realización de los cálculos.

Muchos *software* de PL no incluyen estos métodos a fin de no afectar la eficiencia en términos de velocidad de resolución, basándose en el hecho de que la probabilidad de ocurrencia de un *loop* es muy baja.

Ejemplo 3.2.

MAX:	$4\,x_1 + 3.5\,x_2$
Sujeto a:	$2\,x_1 + 5\,x_2 \leq 20$
	$10\,x_1 + 4\,x_2 \leq 40$
	$1.5\,x_1 + x_2 \leq 6$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

Resolviendo el problema con el método *Simplex* tendremos:

			c_j	4	3.5	0	0	0	
	c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
	0	x_3	20	2	5	1			10
⇐	0	x_4	40	10	4		1		4
	0	x_5	6	1.5	1			1	4
	Z = 0			-4	-3.5	0	0	0	z_j-c_j
				⇑					
	0	x_3	12		4.2	1	-0.2		2.857
	4	x_1	4	1	0.4		0.1		10
⇐	0	x_5	0		0.4		-0.15	1	0
	Z = 16			0	-1.9	0	0.4	0	z_j-c_j
					⇑				
⇐	0	x_3	12			1	1.375	-10.5	8.727
	4	x_1	4	1			0.25	-1	16
	3.5	x_2	0		1		-0.375	2.5	-
	Z = 16			0	0	0	-0.3125	4.75	z_j-c_j
							⇑		
	0	x_4	8.7273			0.7273	1	-7.6364	
	4	x_1	1.8182	1		-0.1818		0.9091	
	3.5	x_2	3.2727		1	0.2727		-0.3636	
	Z = 18.7273			0	0	0.2273	0	2.3636	z_j-c_j

Observando la primera tabla del *Simplex*, vemos que la variable que debe ingresar a la base es x_1. Pero, al determinar la variable que debe salir de la base, notamos que hay un empate de $\theta = 4$, por lo que se puede inferir que la próxima base será degenerada. Para seleccionar cuál de las dos variables (x_4 o x_5) se debería desactivar, aplicamos el algoritmo de protección arriba explicado.

i) Se toman las dos filas de las variables candidatas (x_4 y x_5):

x_4	40	10	4	0	1	
x_5	6	1.5	1	0		1

ii) Cada una de las filas se divide por su pivote: la de x_4 por 10 y la de x_5 por 1.5:

x_4	4	1	0.4	0	0.1	
x_5	4	1	0.667	0		0.667

iii) Al comparar de izquierda a derecha, la primera desigualdad se da en la tercera columna

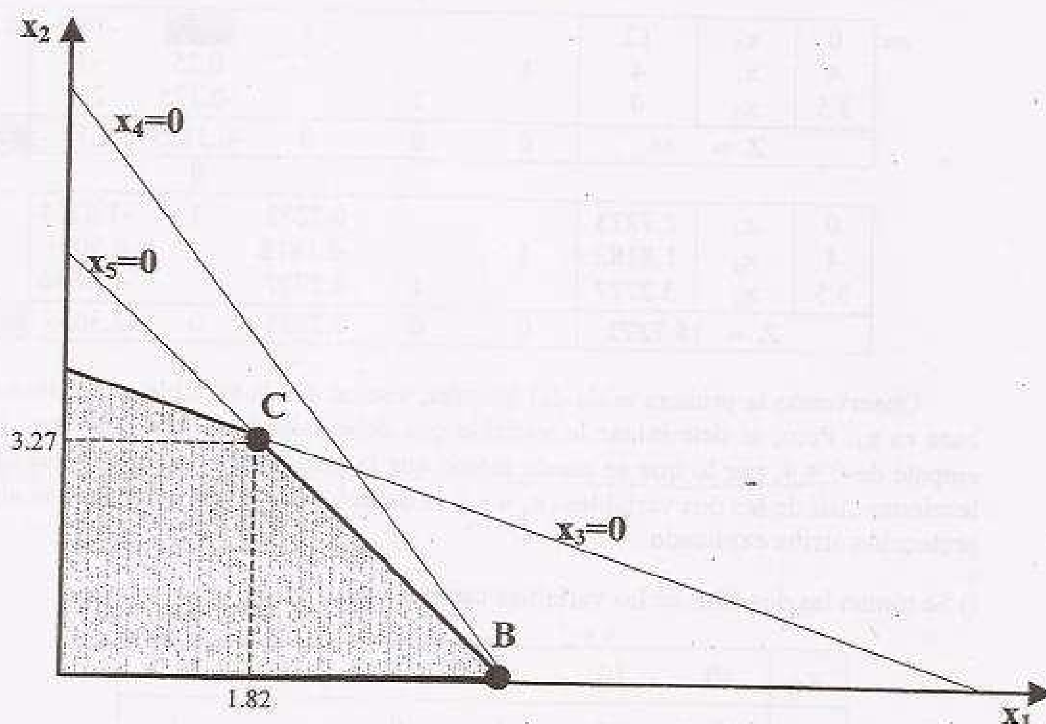
iv) Como 0.4 es menor que 0,667 se elige la variable x_4 para que salga de la solución.

La nueva base (segunda tabla) es una base degradada (punto B) ya que una de las variables básicas adopta un valor nulo (x_5). Procediendo con la nueva iteración (tercera tabla), puede verse que aún estamos en el mismo punto degenerado B, en donde la variable básica nula es ahora x_2. Obsérvese que el valor del funcional es el mismo en las tablas segunda y tercera.

Iterando nuevamente, se produce el cambio de base, y vemos que se ha llegado a la solución óptima.

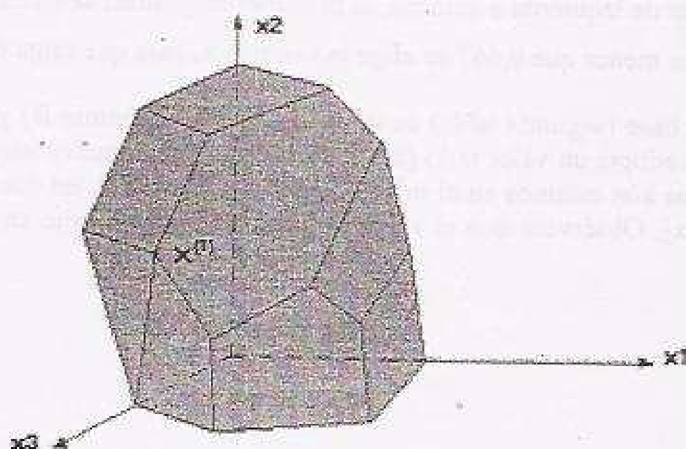
Si en el primer paso se hubiera elegido eliminar x_5 en lugar de x_4 nos habríamos ahorrado la doble iteración en el punto B, pero habríamos corrido el riesgo de entrar en el lazo cerrado.

La solución gráfica a este problema es la siguiente:



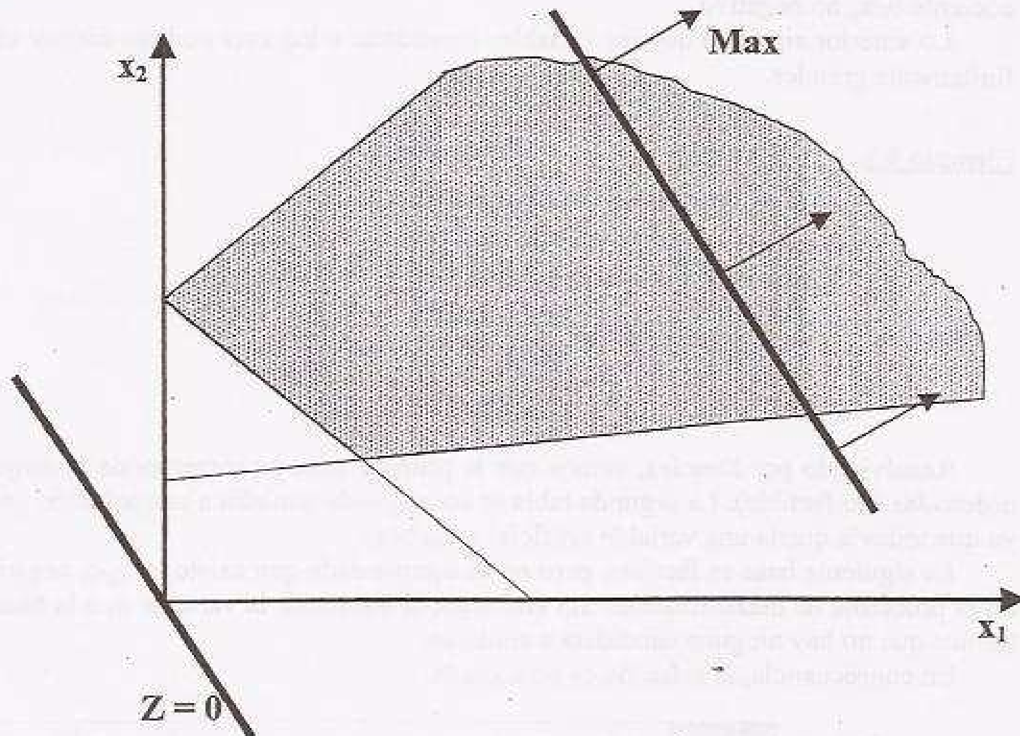
Tal como se puede observar, al punto B concurren las rectas correspondientes a dos restricciones, y además se encuentra sobre el eje correspondiente a $x_2 = 0$. Es decir, en ese punto hay más de "n – m" variables nulas.

Para ilustrar otro ejemplo de degeneración, en el siguiente gráfico se ha dibujado un recinto de soluciones factibles para un problema de tres variables reales (x_1, x_2 y x_3). En este caso n-m es igual a 3. Por lo tanto, todos los puntos indicados son bases convencionales, excepto la solución $X^{(1)}$, en donde se anulan 4 variables.

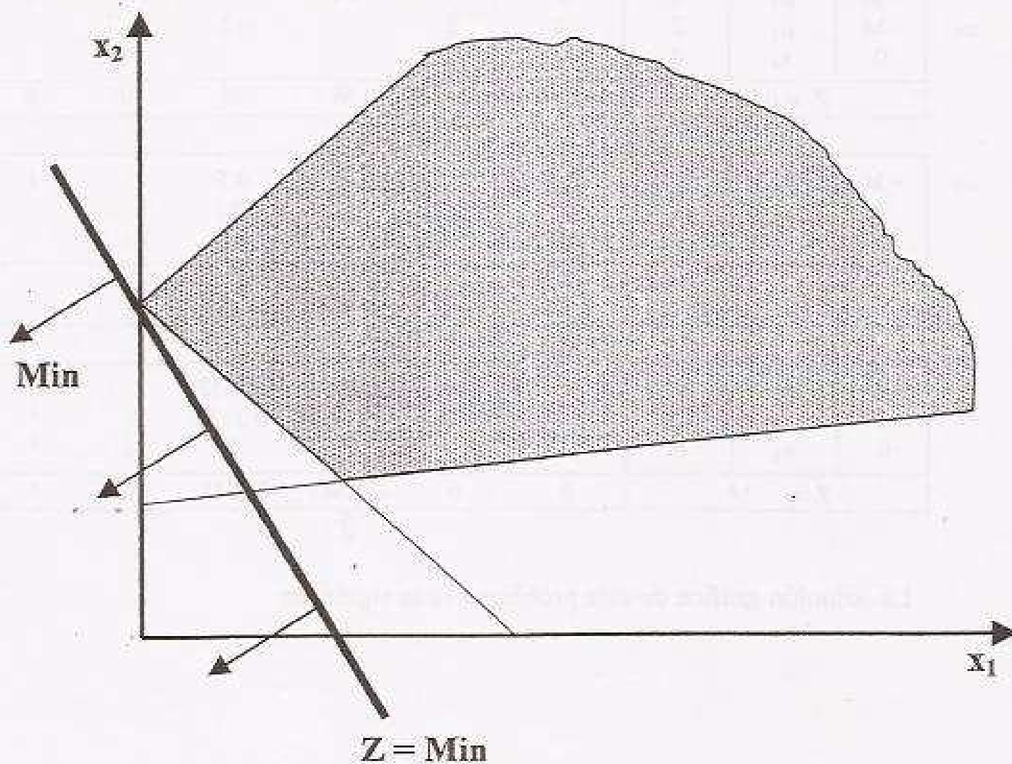


3.3 POLIEDRO ABIERTO

Cuando en el proceso de iteración se pueden aumentar los valores de las variables en forma indefinida a fin de mejorar el valor del funcional, se dice que el problema es de "solución no acotada" o de "poliedro abierto". Estos casos indican que el problema está mal formulado, debido a la no inclusión de alguna restricción o a valores incorrectos de los parámetros.



No existiría inconveniente alguno en formulaciones de poliedro abierto, si se alcanza la solución óptima, como en el siguiente ejemplo de minimización.



En el algoritmo del *Simplex*, el poliedro abierto se identifica cuando no existe ningún cociente b_i/a_{ij} no negativo.

Lo anterior significa que las variables candidatas a ingresar podrían asumir valores infinitamente grandes.

Ejemplo 3.3.

MAX:	$4\,x_1 + 3\,x_2$
Sujeto a:	$1\,x_1 + 1\,x_2 \geq 4$
	$-1\,x_1 + 2\,x_2 \geq 2$
	$-2\,x_1 + \quad x_2 \leq 4$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

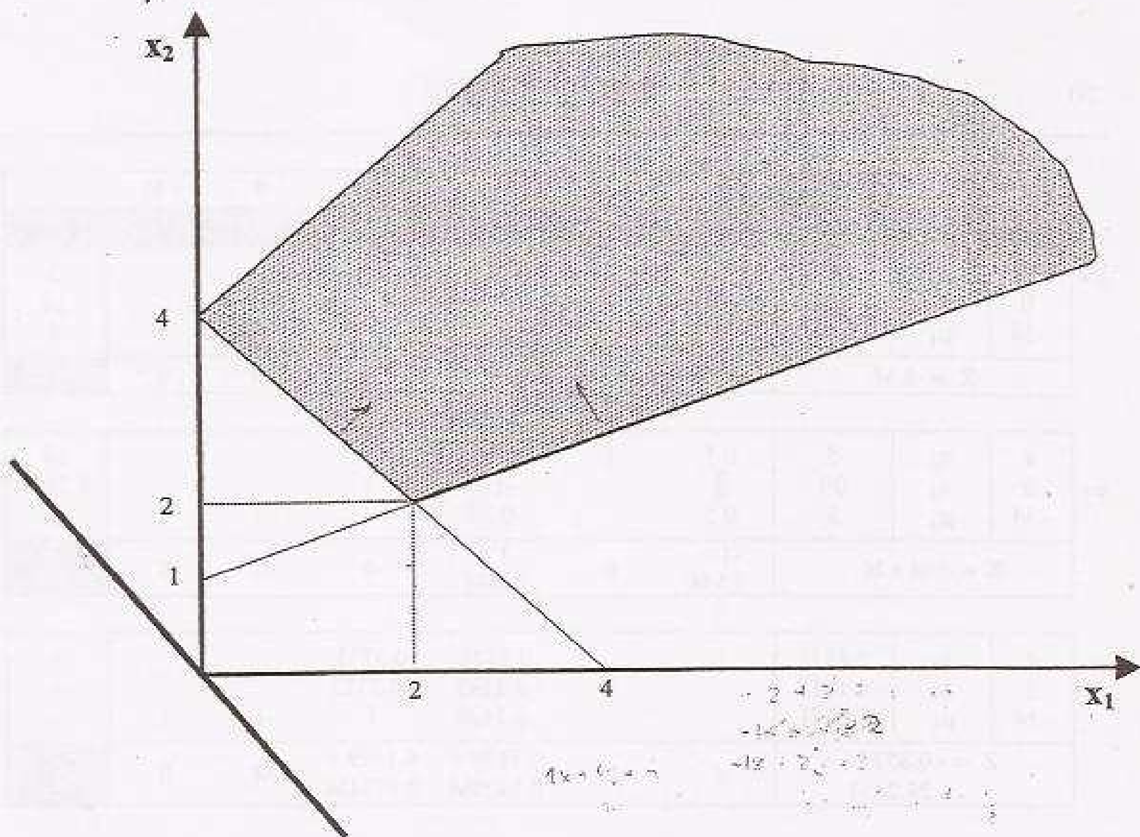
Resolviendo por *Simplex*, vemos que la primera tabla se corresponde al origen de coordenadas (no factible). La segunda tabla se corresponde también a una solución no factible, ya que todavía queda una variable artificial en la base.

La siguiente base es factible, pero no es óptima dado que existe un z_j-c_j negativo, siendo el problema de maximización. Sin embargo, al introducir la variable x_3 a la base, encontramos que no hay ninguna candidata a anularse.

En consecuencia, la solución es no acotada.

			c_i	4	3			0	- M	- M	
	c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	μ_1	μ_2	b_i/a_{ij}
	- M	μ_1	4	1	1	- 1			1		4
⇐	- M	μ_2	2	-1	2		- 1			1	1
	0	x_5	4	-2	0			1			4
	Z = 0			M - 4	-3M - 3	M	M	0	0	0	z_j-c_j
					⇑						
⇐	- M	μ_1	3	1.5		-1	0.5		1	*	20
	3	x_2	1	-0.5	1		-0.5			*	-
	0	x_5	3	-1.5			0.5	1		*	-
	Z = -3M + 3			-5.5 -1.5 M	0	M	-1.5 -0.5M	0	0	*	z_j-c_j
				⇑							
	4	x_1	2	1		-0.6667	0.3333		*	*	-
	3	x_2	2		1	-0.3333	-0.3333		*	*	-
	0	x_5	6			-1	1	1	*	*	-
	Z = 14			0	0	-3.6667	0.3333	0	*	*	z_j-c_j
						⇑					

La solución gráfica de este problema es la siguiente:



3.4 SOLUCIÓN INCOMPATIBLE

Cuando no existe ninguna solución que satisfaga concurrentemente todas las restricciones planteadas, la solución se llama incompatible. Un problema de PL que dé como resultado una solución incompatible está mal formulado y, en consecuencia, deberá ser planteado nuevamente.

En el *Simplex*, este tipo de solución se identifica porque hay variables artificiales en una base que ya no se puede mejorar (esto es, todos los z_j-c_j son positivos en el caso de estar maximizando o negativos si se está minimizando).

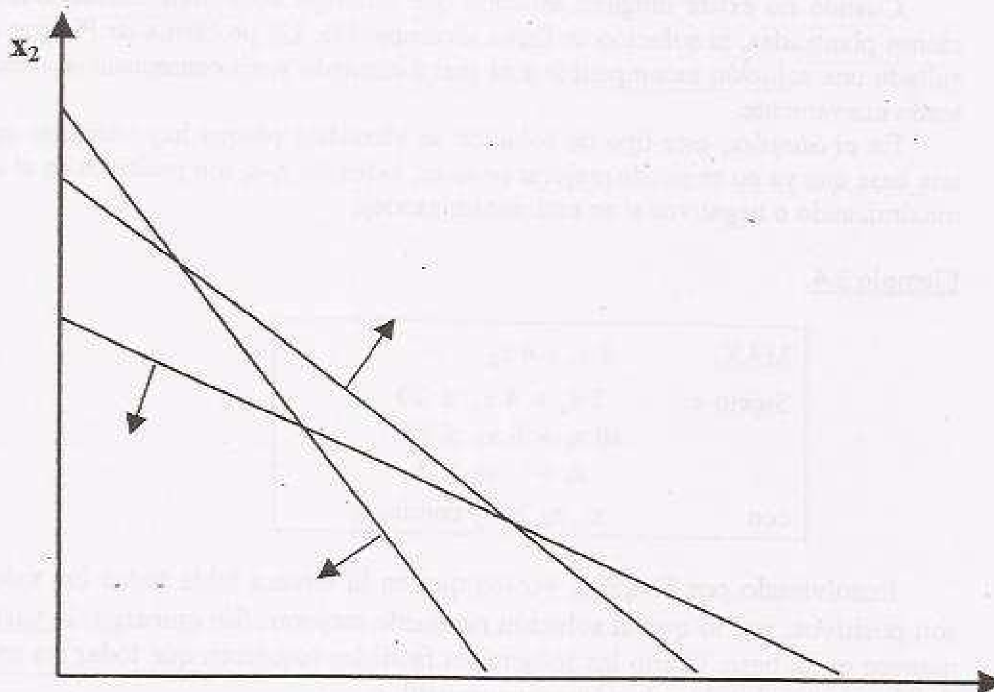
Ejemplo 3.4.

MAX:	$3x_1 + 4x_2$
Sujeto a:	$2x_1 + 4x_2 \leq 20$
	$10x_1 + 6x_2 \leq 60$
	$x_1 + x_2 \geq 8$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

Resolviendo por *Simplex*, vemos que en la tercera tabla todos los valores de z_j-c_j son positivos, por lo que la solución no puede mejorar. Sin embargo, la variable μ_1 permanece en la base. Como las soluciones factibles requieren que todas las variables artificiales sean nulas, la solución es incompatible.

			c_j	3	4			0	- M	
	c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	μ_1	b_i/a_{ij}
⇐	0	x_3	20	2	[illegible]	1				5
	0	x_4	60	10	6		1			10
	- M	μ_1	8	1	1			- 1	1	8
	Z = -8 M			-3 -M	- 4 -M	0	0	M	0	z_j-c_j
					⇑					
	4	x_2	5	0.5	1	0.25				10
⇐	0	x_4	30	[illegible]		-1.5	1			4.2857
	- M	μ_1	3	0.5		-0.25		-1	1	6
	Z = -3 M + 20			-1 + 0.5 M	0	1 + 0.25M	0	M	0	z_j-c_j
				⇑						
	4	x_2	2.8571	1		0.3571	0.3333			-
	3	x_1	4.2857		1	-0.2143	-0.3333			-
	- M	μ_1	0.8571			-0.1429	1	-1	1	-
	Z = - 0.857 M + 24.2857			0	0	0.7857 + 0.1429M	0.1429 + 0.0714M	M	0	z_j-c_j

Gráficamente:



CAPÍTULO 4

FORMULACIÓN DUAL

La formulación natural de un problema de programación lineal se denomina directa (u original, o primal). Asociado a toda formulación directa existe un planteo denominado programación dual.

La relación existente entre la formulación de ambos planteos es la siguiente:

1. Un problema directo de maximización y con restricciones de ≤ tiene asociado un problema dual de minimización con restricciones de ≥. Asimismo, el dual correspondiente a un problema de minimización con restricciones de ≥ resulta un problema de maximización con restricciones de ≤.
2. El problema dual tiene una variable real por cada restricción del original. En consecuencia, el número de variables reales del problema dual es igual al número de restricciones del problema directo. La variable real del problema dual se corresponde con la variable *slack* de la restricción asociada del directo.
3. El problema dual tiene una restricción por cada variable real del directo. En consecuencia, el número de restricciones del problema dual es igual al número de variables reales del original. La variable *slack* de la restricción del dual se corresponde con la variable real asociada del problema directo.
4. La matriz de coeficientes del dual es la matriz transpuesta de coeficientes del original. Es decir, los vectores fila del problema directo se transforman en vectores columna del dual y viceversa.
5. Los coeficientes del funcional de cada variable del original son los términos independientes de la restricción asociada del dual y viceversa.
6. Los términos independientes (RHS) de cada restricción del directo son los coeficientes del funcional de la variable dual asociada y viceversa.
7. Para las condiciones enunciadas en el punto 1), en el problema dual se verifican las condiciones de no negatividad de todas sus variables.

Supongamos una formulación directa de un problema de programación lineal de dos variables reales (x_1 y x_2) con tres restricciones y cuyo objetivo sea de maximización:

MAX:	$c_1 x_1 + c_2 x_2$
Sujeto a:	$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$
	$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2$
	$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq b_3$
con	$x_i \geq 0$

La formulación dual correspondiente es la siguiente:

MIN:	$b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$
Sujeto a:	$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 \geq c_1$
	$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \geq c_2$
con:	$y_i \geq 0$

Es decir, la primera restricción dual está asociada a x_1, mientras que la segunda a x_2. Esto significa que la variable *slack* dual y_4 tiene una correspondencia con x_1, y la variable *slack* dual y_5 con x_2.

Asimismo, la variable y_1 está asociada a la primera restricción directa, la variable y_2 a la segunda y la variable y_3 a la tercera. Esto significa que la variable dual y_1 se corresponde con la variable *slack* directa x_3, la variable y_2 con x_4 y, finalmente, la variable y_3 con x_5.

El denominado teorema fundamental de la dualidad establece que si el problema lineal primitivo tiene solución óptima finita, el problema dual correspondiente también tiene solución óptima finita (y viceversa) y que el valor del funcional de ambas formulaciones coincide en el óptimo.

Este teorema establece, además, que si la solución del directo es no acotada (polígono o poliedro abierto) la solución del problema dual correspondiente es incompatible, y viceversa. Finalmente, si el problema primal tiene una solución alternativa, la solución del dual correspondiente es degenerada, y viceversa.

Las relaciones que establece el teorema de la dualidad entre las soluciones de ambos tipos de formulación las podemos resumir en el siguiente cuadro:

DIRECTO		DUAL
FUNCIONAL DE SOLUCIÓN ÓPTIMA FINITA	=	FUNCIONAL DE SOLUCIÓN ÓPTIMA FINITA
SOLUCIÓN ÓPTIMA ALTERNATIVA	⇔	SOLUCIÓN ÓPTIMA DEGENERADA
SOLUCIÓN INCOMPATIBLE	⇔	SOLUCIÓN POLIEDRO ABIERTO

4.1. PASAJE DE FORMULACIÓN DE PROBLEMA DIRECTO A PROBLEMA DUAL

Para pasar una formulación de un problema original a su formulación dual, se lo deberá llevar primero, o bien a su forma canónica, es decir:

1.	MAX:	$C X$
	Sujeto a	$A X \leq B$
	con	$X \geq 0$

o

2.	MIN:	$C X$
	Sujeto a	$A X \geq B$
	con	$X \geq 0$

o bien, a su forma estándar:

3. MAX: CX
Sujeto a $AX = B$
con $X \geq 0$

o

4. MIN: CX
Sujeto a $AX = B$
con $X \geq 0$

El caso 1 consiste en un problema expresado en su forma canónica de maximización, es decir, con todas las restricciones de menor o igual y con las condiciones de no negatividad de las variables. El dual de este problema es de minimización con todas las restricciones de mayor o igual y con las condiciones de no negatividad para las variable duales, como se indica a continuación:

MIN: BY
Sujeto a $A^T Y \geq C$
con $Y \geq 0$

Las restricciones de " ≤ " son las naturales para los problemas de maximización. Obviamente, en la formulación original de un problema de PL de máximo podremos tener también algunas restricciones de menor o igual. En este caso, para convertir la formulación directa en dual se deben transformar primero todas las restricciones de " ≥ " en restricciones de " ≤ ".

El caso 2 consiste en un problema de PL expresado en su forma canónica de minimización, es decir, con todas las restricciones de mayor o igual y con las CNN de las variables.

El dual de este problema es un caso de maximización con todas las restricciones de menor o igual y con las CNN para las variables duales, como se indica a continuación:

MAX: BY
sujeto a $A^T Y \leq C$
con $Y \geq 0$

Las restricciones de " ≥ " son las naturales de los problemas de minimización. Si en la formulación original del problema de mínimo hubiera restricciones de menor o igual, para convertir la formulación directa en dual se deben transformar primero todas las restricciones de " ≤ " en restricciones de " ≥ ".

El caso 3 es un problema de PL expresado en su forma estándar de maximización, es decir, con todas las restricciones de igual y con las CNN. El dual de este problema es de minimización pero sin la condición de no negatividad de las variables (es decir, las variables y_j son irrestrictas):

MIN: BY
Sujeto a: $A^T Y \geq C$

Si en el problema directo hubiera desigualdades, éstas se deberán convertir en restricciones de igual antes de transformar el problema a la formulación dual.

El caso 4 es un problema de PL expresado en su forma estándar de minimización, es decir, con todas las restricciones de igual y con las CNN. El dual de este caso es un problema de maximización, con todas las restricciones de menor o igual, pero sin la condición de no negatividad de las variables (es decir, las variables duales son irrestrictas):

MAX:	B Y
Sujeto a	$A^TY \leq C$

Si en la formulación original de este problema hubiera desigualdades, éstas se deberán convertir en restricciones de igual antes de transformar el problema a la formulación dual.

Los duales de las formas canónicas (casos 1 y 2) son formulaciones simétricas. Es decir, se modifican simétricamente los signos de las restricciones con respecto a la formulación primal (restricciones de ≤ se transforman en restricciones de ≥ en el caso 1, y restricciones de ≥ en restricciones de ≤ en el caso 2).

Los duales de las formas estándar (casos 3 y 4), en cambio, son formulaciones asimétricas, ya que se modifican asimétricamente los signos de las restricciones con respecto a la formulación primal (restricciones de = en restricciones de ≥ en el caso 3, y restricciones de = en restricciones de ≤ en el caso 4).

En resumen, las formulaciones duales de las cuatro formas canónicas se muestran en el siguiente cuadro:

CASO	FORMA	DIRECTO	DUAL	TIPO
1	CANÓNICA	MAX: CX Sujeto a $AX \leq B$ con $X \geq 0$	MIN: BY Sujeto a $A^TY \geq C$ con $Y \geq 0$	SIMÉTRICO
2	CANÓNICA	MIN: CX Sujeto a $AX \geq B$ con $X \geq 0$	MAX: BY Sujeto a $A^TY \leq C$ con $Y \geq 0$	SIMÉTRICO
3	ESTÁNDAR	MAX: CX Sujeto a $AX = B$ con $X \geq 0$	MIN: BY Sujeto a $A^TY \geq C$	ASIMÉTRICO
4	ESTÁNDAR	MIN: CX Sujeto a $AX = B$ con $X \geq 0$	MAX: BY Sujeto a $A^TY \leq C$	ASIMÉTRICO

Es obvio que los casos 1 y 2 son intercambiables: cualquier problema de MAX se puede convertir en un problema de MIN y viceversa, y cualquier restricción de mayor o igual se puede transformar en una restricción de menor o igual y viceversa. Por ejemplo:

MAX: $3x_1 + 6x_2 - 4x_3$
Sujeto a: $4x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 100$

es lo mismo que:

MIN: $-3x_1 - 6x_2 + 4x_3$

Sujeto a: $-4x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -100$

Cabe mencionar que las formas canónicas no tienen como requisito la condición de no negatividad de los términos independientes. En consecuencia, esta forma no es apropiada para formular la primera tabla del algoritmo del *Simplex*.

Del mismo modo, los casos 3 y 4 son intercambiables. Las formas estándar requieren la condición de no negatividad de los términos independientes por lo que son las que se deben usar para formular la primera tabla del *Simplex*.

Veamos a continuación algunos ejemplos:

Ejemplo 4.1:

MAX	$2x_1 + x_2$
Sujeto a	$-5x_1 + 3x_2 \geq 5$
	$x_1 + x_2 \leq 4$
con	$x_j \geq 0$

Antes de formular el problema dual, se debe pasar el directo a una de las formas canónicas o estándar.

Como el problema es de maximización y con desigualdades, conviene llevarlo al caso 1. Para ello se transforma la primera inecuación de mayor o igual en una inecuación de menor o igual:

MAX	$2x_1 + x_2$
Sujeto a	$5x_1 - 3x_2 \leq -5$
	$x_1 + x_2 \leq 4$
con	$x_j \geq 0$

Luego se procede a transformarlo al dual correspondiente:

MIN	$-5y_1 + 4y_2$
Sujeto a	$5y_1 + y_2 \geq 2$
	$-3y_1 + y_2 \geq 1$
con	$y_j \geq 0$

Ejemplo 4.2:

MAX	$3x_1 + 4x_2 - 2x_3$
Sujeto a	$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 25$
	$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 10$
	$6x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30$
con	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

La forma canónica de maximización del problema es:

MAX	$3x_1 + 4x_2 - 2x_3$
Sujeto a	$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 25$
	$-x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq -10$
	$6x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30$
con	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

El PL dual correspondiente es:

MIN	$25y_1 - 10y_2 + 30y_3$
Sujeto a	$2y_1 - y_2 + 6y_3 \geq 3$
	$3y_1 - 3y_2 + 2y_3 \geq 4$
	$3y_1 - 2y_2 + y_3 \geq -2$
con	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Sin embargo, como la última restricción quedó con un término independiente negativo, habrá que multiplicarla por -1 a fin de que el problema dual de PL quede formulado definitivamente como:

MIN	$25y_1 - 10y_2 + 30y_3$
Sujeto a	$2y_1 - y_2 + 6y_3 \geq 3$
	$3y_1 - 3y_2 + 2y_3 \geq 4$
	$-3y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 2$
con	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Ejemplo 4.3:

MIN	$7x_1 + 2x_2$
Sujeto a	$x_1 + x_2 = 100$
	$x_2 \geq 55$
	$2x_1 + x_2 \leq 180$
con	$x_1, x_2 \geq 0$

Dado que existe una restricción de igual en el planteo original se puede expresar el problema original en su forma estándar de minimización:

MIN	$7x_1 + 2x_2$
Sujeto a	$x_1 + x_2 = 100$
	$x_2 - x_3 = 55$
	$2x_1 + x_2 + x_4 = 180$
con	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

cuyo pasaje al dual correspondiente da como resultado:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & 100\,y_1 + 55\,y_2 + 180\,y_3 \\ \text{Sujeto a} & y_1 \qquad\quad + 2\,y_3 \le 7 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \le 2 \\ & -\,y_2 \qquad\quad \le 0 \\ & \qquad\qquad y_3 \le 0 \end{array}$$

En este caso no se formulan condiciones de las variables.

Sin embargo, la propia formulación del problema las puede restringir en cuanto a signo. Como se puede observar y_2 es no negativa e y_3 es no positiva. En efecto, multiplicando la tercera ecuación por -1, tendremos la formulación dual definitiva del ejemplo planteado:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & 100\,y_1 + 55\,y_2 + 180\,y_3 \\ \text{Sujeto a} & y_1 \qquad\quad + 2\,y_3 \le 7 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \le 2 \\ & \quad y_2 \qquad\quad \ge 0 \\ & \qquad\qquad y_3 \le 0 \end{array}$$

A fin de comprender claramente los conceptos hasta aquí vistos del programa dual, se formulará a continuación el ejemplo de un caso básico.

<u>Ejemplo 4.4:</u>

Un empresario dispone de un conjunto de máquinas-herramientas (fresadoras, tornos y pulidoras) para elaborar piezas (A y B). Cada pieza A insume 1 h de fresado, 2 de torneado y 0,5 de pulido, mientras que cada pieza B requiere 2.5 h de fresado, 1 de torneado y 0,8 de pulido. El fabricante dispone de 1800 h de fresadoras; 1600 h de tornos y 800 h de pulidoras por mes y sabe que cada pieza A le deja un beneficio de $ 120, mientras que cada pieza B, de $ 200.

Las formulaciones directa y dual de este problema son las siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{MAX} & & 120\,x_1 + 200\,x_2 \\ \text{sujeto a} & \text{FRE)} & x_1 + 2.5\,x_2 \le 1800 \\ & \text{TOR)} & 2\,x_1 + x_2 \le 1600 \\ & \text{PUL)} & 0.5\,x_1 + 0.8\,x_2 \le 800 \\ \text{con} & & x_i \ge 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{MIN} & & 1800\,y_1 + 1600\,y_2 + 800\,y_3 \\ \text{sujeto a} & \text{A)} & 1\,y_1 + 2\,y_2 + 0.5\,y_3 \ge 120 \\ & \text{B)} & 2.5\,y_1 + y_2 + 0.8\,y_3 \ge 200 \\ \text{con} & & y_i \ge 0 \end{array}$$

Esto es, la primera restricción está relacionada al producto A y la segunda restricción lo está al producto B. Asimismo, la variable y_1 está relacionada a la restricción de fresado (FRE), la variable y_2 a torneado (TOR) e y_3 a pulido (PUL).

Si transformáramos los sistemas de inecuaciones de los problemas directo y dual en sistemas de ecuaciones, tendríamos:

PROBLEMA DIRECTO:

$$\begin{aligned} x_1 + 2.5\ x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1800 \\ 2\,x_1 + \quad x_2 \quad + x_4 \qquad &= 1600 \\ 0.5\,x_1 + 0.8\ x_2 \qquad + x_5 &= \ 800 \end{aligned}$$

PROBLEMA DUAL:

$$\begin{aligned} y_1 + 2\,y_2 + 0.5\,y_3 + y_4 \qquad &= 120 \\ 2.5\,y_1 + \quad y_2 + 0.8\,y_3 \qquad + y_5 &= 200 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la correspondencia existente entre variables es la siguiente:

DIRECTO	DUAL
x_1	y_4
x_2	y_5
x_3	y_1
x_4	y_2
x_5	y_3

Para verificar el teorema fundamental de la dualidad, resolveremos ambos problemas lineales.

Como vemos en la última tabla, la producción mensual óptima es de 550 unidades de A y 500 unidades de B, lo que genera una utilidad de $ 166000 por mes. El sobrante de pulido es de 125 horas mensuales. También se observa que el valor marginal de fresado es de 70 $/h y el de torneado de 25 $/h.

PROBLEMA DIRECTO

		c_j	120	200	0		0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{i1}
0	x_3	1800	1	2.5	1			720
0	x_4	1600	2	1		1		1600
0	x_5	800	0.5	0.8			1	1000
Z =		0	-120	-200	0	0	0	z_j-c_j
200	x_2	720	0.4	1	0.4		1	1800
0	x_4	880	1.6		-0.4	1		550
0	x_5	224	0.18		-0.32			1244.44
Z =		144000	-40	0	80	0	0	z_j-c_j
200	x_2	500		1	0.5	-0.25		
120	x_1	550	1		-0.25	0.625		
0	x_5	125			-0.275	-0.1125	1	
Z =		166000	0	0	70	25	0	z_j-c_j

PROBLEMA DUAL

		b_j	1800	1600	800			M	M	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	μ_1	μ_2	b_i/a_{ij}
M	μ_1	120	1	2	0.5	-1		1		120
M	μ_2	200	2.5	1	0.8		-1		1	80
Z = 320 M			3.5M -1800	3M -1600	1.3M -800	-M	-M	0	0	z_j-b_j

120	μ_1	40		1.6	0.18	-1	0.4	1	-0.4	25
200	y_1	80	1	0.4	0.32		-0.4		0.4	200
Z = 40 M + 144000			0	1.6 M -800	0.18 M -224	-M	0.4 M -720	0	-1.4 M +720	z_j-b_j

1600	y_2	25		1	0.1125	-0.625	0.25	0.625	-0.25	
1800	y_1	70	1		0.2750	0.25	-0.5	-0.25	0.5	
Z = 166000			0	0	-125	-550	-500	-M +550	-M +500	z_j-b_j

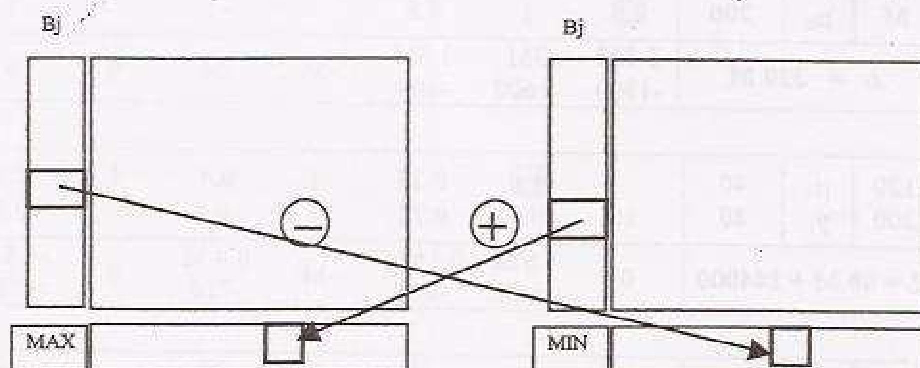
Podemos observar en la tabla óptima dual que el valor del funcional coincide con el de la tabla óptima directa. Asimismo, los valores de las variables duales son los z_j-c_j de las variables directas correspondientes.

4.2 PASAJE DE TABLA ÓPTIMA DIRECTA A ÓPTIMA DUAL

Una vez obtenida la tabla óptima del problema directo se puede pasar directamente a la tabla óptima dual (o viceversa), teniendo en consideración lo siguiente:

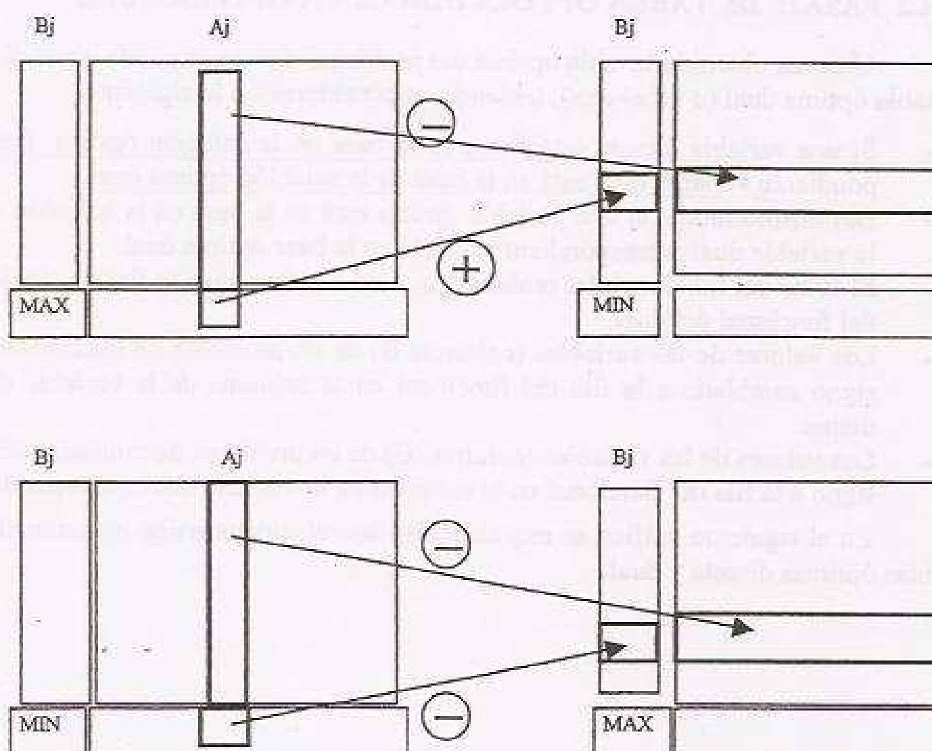
- Si una variable directa está fuera de la base en la solución óptima directa, su correspondiente variable dual está en la base de la solución óptima dual.
- Del mismo modo, si una variable directa está en la base en la solución óptima directa, la variable dual correspondiente no está en la base óptima dual.
- El valor del funcional del problema directo de una solución finita coincide con el valor del funcional del dual.
- Los valores de las variables (columna B) de un problema de maximización pasan con signo cambiado a la fila del funcional en la columna de la variable dual correspondiente.
- Los valores de las variables (columna B) de un problema de minimización pasan con su signo a la fila del funcional en la columna de la variable dual correspondiente.

En el siguiente gráfico se esquematizan las relaciones arriba mencionadas entre las tablas óptimas directa y dual.



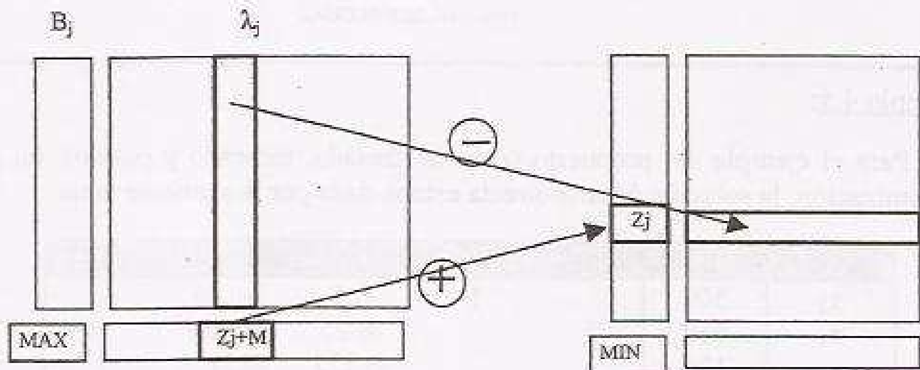
- Los coeficientes a_{ij} de los vectores columna (A_j) asociados a las actividades (variables reales) o a las desigualdades (variables *slacks*) del problema pasan con signo cambiado a la fila de la variable dual correspondiente. Si el problema es de maximización, el coeficiente de la fila del funcional (z_j-c_j) de estos vectores columna pasa con su signo a la fila correspondiente de la columna B. Si, en cambio, el problema es de minimización, cambia el signo.

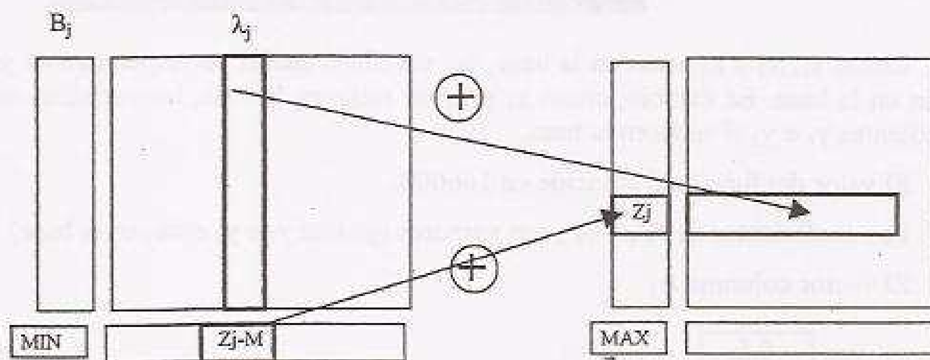
Esquemáticamente:



- Los coeficientes a_{ij} de vectores columna asociados a igualdades (λ_j) pasan a la fila de la variable dual correspondiente con signo cambiado si el problema original es de maximización, y con el mismo signo si el problema original es de minimización. Sin embargo, el coeficiente de la fila del funcional de un problema de maximización (z_j+M) o

$(z_j$-M) de un problema de minimización de estos vectores columna pasa como z_j siempre con su signo a la fila correspondiente de la columna B.





En resumen, siendo y_p la variable dual correspondiente a x_i e y_q la variable dual correspondiente a x_j, los coeficientes a_{ij} y z_j-c_j del funcional correspondientes al vector A_j del problema directo, se transforman de la siguiente manera en el dual:

Vector columna		Coef.	MAX ⇒ MIN	MIN ⇒ MAX
ACTIVIDADES Y DESIGUALDADES	A_j	a_{ij} z_j-c_j	$-a_{pq}$ y_q	$-a_{pq}$ $-y_q$
IGUALDADES	λ_j	a_{ij} z_j-c_j	$-a_{pq}$ y_q	a_{pq} y_q

En forma más mnemotécnica:

	MAX ⇒ MIN	
	a_{ij}	$z_j - c_j$
A_j	-	+
λ_j	-	+

	MIN ⇒ MAX	
	a_{ij}	$z_j - c_j$
A_j	-	-
λ_j	+	+

Es obvio, que las mismas consideraciones deben tenerse en cuenta cuando el pasaje se realiza desde la solución óptima dual a la solución óptima directa.

A continuación se formularán distintos problemas a los fines de ejemplificar lo aquí enunciado.

Ejemplo 4.5:

Para el ejemplo 4.4 propuesto (caso de fresado, torneado y pulido), un problema de maximización, la solución óptima directa estaba dada por la siguiente tabla:

x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
x_2	500		1	0.5	-0.25	
x_1	550	1		-0.25	0.625	
x_5	125			-0.275	-0.1125	1
Z = 166000				70	25	
		y_4	y_5	y_1	y_2	y_3

Como x_1, x_2 y x_5 están en la base, las variables duales correspondientes y_4, y_5 e y_3 no están en la base. En cambio, como x_3 y x_4 no están en la base, las variables duales correspondientes y_1 e y_2 sí están en la base.

El valor del funcional coincide en 166000.

Los coeficientes de A'_1 y A'_2 son versores (ya que y_1 e y_2 están en la base).

El vector columna A_3

x_2	0.5
x_1	-0.25
x_5	-0.275
z_3-c_3	70
	y_1

se transforma en el vector fila de la variable y_1 en donde z_3-c_3 se convierte en el valor de y_1, y los a_{i3} se convierten correspondientemente, con el signo cambiado (ya que el vector surge de una restricción de "$\leq$") en $-a'_{1j}$.

70	0.275	0.25	-0.5
	x_5	x_1	x_2

Del mismo modo, el vector columna A_4

x_2	-0.25
x_1	0.625
x_5	-0.1125
z_4-c_4	25
	y_2

se transforma en el vector fila de la variable y_2 en donde z_4-c_4 se convierte en el valor de y_2, y los a_{i4} se convierten correspondientemente, con el signo cambiado (ya que el vector surge de una restricción de $\leq$) en $-a'_{2j}$.

25	0.1125	-0.625	0.25
	x_5	x_1	x_2

De esta forma, el dual óptimo es:

y_k	B_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5
y_2	25		1	0.1125	-0.625	0.25
y_1	70	1		0.2750	0.25	-0.5
Z = 166000				-125	-550	-500
		x_3	x_4	x_5	x_1	x_2

Es decir:

- $a_{23} = 0.5$ (intersección x_2, y_1 en el primal) se transforma en $a'_{15} = -0.5$ (intersección y_1, x_2 en el dual),
- $a_{13} = -0.25$ (intersección x_1, y_1 en el primal) se transforma en $a'_{14} = 0.25$ (intersección y_1, x_1 en el dual), y
- $a_{53} = -0.275$ (intersección x_5, y_1 en el primal) se transforma en $a'_{13} = 0.275$ (intersección y_1, x_5 en el dual).

Del mismo modo,

- $a_{24} = -0.25$ (intersección x_2, y_2 en el primal) se transforma en $a'_{25} = 0.25$ (intersección y_2, x_2 en el dual),
- $a_{14} = 0.625$ (intersección x_1, y_2 en el primal) se transforma en $a'_{24} = -0.625$ (intersección y_2, x_1 en el dual), y
- $a_{54} = -0.1125$ (intersección x_5, y_2 en el primal) se transforma en $a'_{23} = 0.1125$ (intersección y_2, x_5 en el dual),

Ejemplo 4.6:

Dado el siguiente problema

MIN: $x_1 + 0.5\,x_2 + 2\,x_3$

Sujeto a:

$$3\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 \geq 3.6$$
$$x_1 + 0.5\,x_2 + 2\,x_3 \geq 1.2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

con $x_j \geq 0$

cuya tabla óptima se indica a continuación, pasar de la tabla óptima directa a la tabla óptima dual.

		c_j	1	0.5	2			M	M	M
C_k	X_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	μ_1	μ_2	λ
1	x_1	0.4	1	2		1		-1		4
0	x_5	0.4		-0.5		-1	1	1	-1	-2
2	x_3	0.6		1	1	-1		1		-3
	Z = 1.6			-0.5		-1		1-M	-M	-2-M
			y_4	y_5	y_6	y_1	y_2			y_3

Resolución:

Como el problema es de minimización la columna correspondiente a la igualdad λ pasa como fila de la restricción sin cambiar el signo.

		b_j	3.6	1.2	1			
b_k	y_k	B_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	A'_6
3.6	y_1	1	1	1		-1		1
1	y_3	-2		-2	1	4		-3
0	y_5	0.5		0.5		-2	1	-1
	Z = 1.6			0.4		0.4		0.6
			x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	x_3

La variable y_3 es irrestricta debido a que la formulación del problema dual así lo establece.

Como vemos, el valor óptimo de la variable y_3, en este caso, da un resultado negativo.

4.3 INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DEL PROBLEMA DUAL

No siempre es factible encontrar un significado intuitivo de las variables duales. Sin embargo, cuando la formulación del problema consiste en una optimización económica, las variables duales tienen una interpretación interesante desde el punto de vista de la toma de decisiones.

Las variables reales del problema dual son los valores marginales z_j-c_j de las restricciones del problema directo. Tal como hemos visto, representan la modificación que se verificaría en el funcional por cada unidad de relajación de la restricción. En las restricciones de mayor o igual, liberar la restricción implica reducir la condición en una unidad, mientras que en las de menor o igual, liberar la restricción implica aumentar la condición en una unidad.

Supongamos que tenemos una restricción de $\leq$ formulando una disponibilidad máxima de un recurso "b". En este caso, el valor marginal (también llamado "precio sombra") representa la mejora que se evidencia en el funcional por cada unidad de recurso que se obtenga. Cuando hablamos de mejora nos referimos a "incremento" si se está maximizando o a "disminución" si se está minimizando. Esto significa, entonces, que el valor marginal de un recurso limitado por una restricción de $\leq$ es el precio máximo que se estaría dispuesto a pagar por obtener una unidad adicional del mismo. Del mismo modo, constituye el precio mínimo al que se le debería vender una unidad de ese recurso a un tercero. Cuando el valor marginal es cero, significa que tenemos disponibilidad sobrante del recurso "b" y, en consecuencia, no habría necesidad de adquirirlo, por lo que el precio de compra es cero. Resulta obvio que cualquier valor que obtengamos por la venta del recurso sobrante es conveniente, y por ello el precio mínimo de venta es cero.

Suponiendo ahora que tenemos una restricción de $\geq$ formulando un requerimiento mínimo de fabricación "b" de un producto A, el valor marginal representa la mejora que experimentaría el funcional por cada unidad que se pudiera disminuir la limitación del requerimiento. Esto significa que el hecho de cumplir con el requerimiento mínimo resulta un perjuicio y, en consecuencia, el valor marginal sería el precio máximo que se podría pagar a un tercero por una unidad del producto, a fin de cumplir con el requerimiento impuesto. También, representa lo que se debería incrementar el precio de venta de las unidades que estén por encima de la producción óptima a fin de cumplir con la restricción.

Las variables *slacks* del problema dual son los costos de oportunidad z_j-c_j de las variables reales del problema directo. Tal como hemos visto, el costo de oportunidad (también llamado "costo reducido"), representa el perjuicio que se obtiene en el funcional (disminución en el caso de estar maximizando o aumento en el caso de estar minimizando) por cada unidad que se active una variable cuando la solución óptima del problema indica que dicha actividad debe ser nula. Esto significa que el costo de oportunidad nos indica en cuánto habría que modificar el coeficiente de la variable en el funcional para que convenga activarla. Si, por ejemplo, la variable x representara la cantidad a fabricar de un producto, y la solución óptima estableciera que no se debe producir dicho producto, el costo de oportunidad estaría representando el incremento que debería realizarse en el precio de venta unitario (o la disminución en el costo) para que convenga producirlo. En un problema en donde la variable x represente la cantidad a adquirir de un cierto producto, y el programa óptimo determine no comprarlo, el costo reducido representará el valor que el proveedor debería disminuir el precio para que sea conveniente adquirir dicho producto.

Problemas de maximización

Ejemplo 4.7:

Interpretar la formulación dual del ejercicio 4.4.

Resolución:

Si la intención del empresario es dedicarse a la fabricación de piezas A y B, entonces se debería plantear el siguiente programa lineal:

$$\text{MAX} \quad 120\,x_1 + 200\,x_2$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \text{FRE)} \quad & x_1 + 2.5\,x_2 \leq 1800 \\ \text{TOR)} \quad & 2\,x_1 + x_2 \leq 1600 \\ \text{PUL)} \quad & 0.5\,x_1 + 0.8\,x_2 \leq 800 \end{aligned}$$

siendo las $x_i \geq 0$

El resultado óptimo de este problema, mostrado con la última tabla del *Simplex*, es el siguiente:

		c_j	120	200	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
200	x_2	500	1	1	0.50	-0.25	1	
120	x_1	550			-0.25	0.625		
0	x_5	125			-0.275	-0.112		
	Z	166000			70	25		z_j-c_j
			y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	

Es decir, se deberían producir 500 piezas B y 550 piezas A para obtener un resultado de $ 166.000 por mes. De esta forma, se haría uso de la totalidad de los recursos de fresado y torneado y quedaría un sobrante de 125 horas por mes de pulido.

Sin embargo, el empresario podría plantearse la alternativa de vender los recursos de sus máquinas fresadoras, tornos y pulidoras a algún tercero interesado. En este caso se debería plantear como interrogante cuál debería ser el precio mínimo de venta de estos recursos. Surge de inmediato que el precio de venta mínimo de las 125 horas sobrantes de pulido es cero, ya que cualquier valor al que se pueda vender la hora de pulidora daría una mayor ganancia.

Es obvio que si el empresario decide vender las horas de los recursos, tendrá que resignar fabricación de piezas A y B, al menos si vende horas de fresa y de torno (o más de 125 horas de pulidora).

En el caso límite de que venda todos sus recursos, el empresario deberá ganar como mínimo los $ 166000 por mes que está ganando actualmente. En consecuencia, su objetivo sería determinar los precios de venta mínimos que debe fijar a los recursos para obtener por lo menos el beneficio que obtendría si dedicara sus recursos a fabricar y vender piezas A y B.

Para ello, el beneficio que se obtenga por vender los recursos que se dedican a la fabricación de una pieza A debe ser mayor que el beneficio que se obtiene por fabricar y vender dicha pieza, y el beneficio que se obtenga por vender los recursos que se dedican a la fabricación de una pieza B debe ser mayor que el que se obtiene por fabricar y vender dicha pieza.

Cada pieza A requiere 1 h de fresado, 2 de torneado y 0.5 de pulido. En consecuencia, el beneficio que se obtendría por vender los recursos de fresado a un precio y_1, torneado a un precio y_2 y pulido a un precio y_3 debe ser mayor al beneficio de $ 120 que se obtendría por fabricar y vender la pieza A, es decir:

$$1\,y_1 + 2\,y_2 + 0.5\,y_3 \geq 120$$

Del mismo modo, para la pieza B:

$$2.5\,y_1 + y_2 + 0.8\,y_3 \geq 200$$

Debido a que se dispone de 1800 horas de fresado, 1600 de torneado y 800 de pulido, el valor total mínimo que se debería obtener al vender los recursos debería ser:

$$1800\,y_1 + 1600\,y_2 + 800\,y_3$$

Este es, entonces, el otro planteo que se podría hacer el empresario para analizar la posibilidad de la venta de sus recursos:

$$\begin{array}{l} \text{MIN } 1800\,y_1 + 1600\,y_2 + 800\,y_3 \\ \text{Sujeto a} \\ \quad y_1 + 2\,y_2 + 0.5\,y_3 \geq 120 \\ 2.5\,y_1 + y_2 + 0.8\,y_3 \geq 200 \\ \text{con las } y_i \geq 0 \end{array}$$

Este programa constituye la formulación dual del problema original enunciado más arriba, cuya tabla óptima del *Simplex* es:

	j	b_i	1800	1600	800	0	0	
b_k	Y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
1800	**Y_1**	**70**	**1**		**0.275**	**0.250**	**-0.50**	
1600	**y_2**	**25**		**1**	**0.1125**	**-0.625**	**0.25**	
Z = 166000					**-125**	**-550**	**-500**	z_j-c_j
			x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	

En forma genérica, para una restricción j de menor o igual, del tipo:

$$\boxed{\sum a_{ij}.x_i \leq \ b_j}$$

el valor marginal y_j representa el precio al que la empresa debería desprenderse de una unidad (por ejemplo, mediante la venta) de una unidad del recurso j en lugar de asignarla a las actividades x_i.

Los costos de oportunidad son las variables *slacks* de la formulación dual. Para una restricción i dual asociada a un producto x_i

$$\boxed{\sum a_{ij}.y_j \geq \ c_i}$$

la ecuación correspondiente, agregando la variable *slack* y_i sería:

$$\boxed{\sum a_{ij}.y_j - y_i = c_i}$$

En el ejemplo anterior, para la pieza A la restricción correspondiente es:

$1\ y_1 + 2\ y_2 + 0.5\ y_3 \ \geq\ 120$

y, por consiguiente:

$1\ y_1 + 2\ y_2 + 0.5\ y_3\ - y_4\ =\ 120$

El valor de $1\ y_1 + 2\ y_2 + 0.5\ y_3$ se interpreta como el beneficio que se obtendría por vender los recursos que demandaría la fabricación de una pieza A, mientras que 120 es el beneficio que se obtendría por fabricar y vender la pieza A. En consecuencia y_4, el costo reducido de la pieza A, es lo que estaría dejando de ganar el empresario si fabricara y vendiera la pieza A en lugar de vender los recursos que ella insume.

En resumen, los valores óptimos de las variables duales y_j son los z_j-c_j del problema directo. Los valores marginales son los z_j-c_j de las variables asociadas a las restricciones y los costos de oportunidad son los z_j-c_j de las variables asociadas a las actividades, tal como puede observarse en la siguiente tabla resumen correspondiente a la solución directa del ejemplo arriba enunciado:

Producto / Recurso	Variable	Valor	Costo reducido / Valor marginal
A	x_1	550	0
B	x_2	500	0
FRESADO	x_3	0	70
TORNEADO	x_4	0	25
PULIDO	x_5	125	0
FUNCIÓN OBJETIVO		$ 166000	

Del mismo modo, los valores óptimos de las variables directas x_i son los z_i-c_i del problema dual. A continuación se muestra la tabla resumen de la solución dual del mismo ejemplo:

Costo reducido / Valor marginal	Variable	Valor	Producto / Recurso
FRESADO	y_1	70	0
TORNEADO	y_2	25	0
PULIDO	y_3	0	125
A	y_4	0	550
B	y_5	0	- 500
FUNCIÓN OBJETIVO		$ 166000	

Ejemplo 4.8:

Interpretar económicamente la modificación en el planteo y en la solución óptima del Ejemplo 2.4 si se formulara adicionalmente la siguiente restricción de ≥: "La producción mínima de A debe ser de 600 unidades".

Resolución:

Tal como se comentó anteriormente, en los problemas de maximización las restricciones de ≤ son naturales, mientras que las de mayor o igual son relativamente excepcionales.

La expresión matemática de la nueva limitación es:

$x_1 \geq 600$

El planteo directo del problema sería entonces:

MAX	$120\,x_1 + 200\,x_2$
sujeto a las siguientes restricciones:	
FRE)	$x_1 + 2.5\,x_2 \leq 1800$
TOR)	$2\,x_1 + x_2 \leq 1600$
PUL)	$0.5\,x_1 + 0.8\,x_2 \leq 800$
REQ.MIN)	$x_1 \geq 600$

Resolviendo, se obtiene la siguiente solución:

Producto / Recurso	Variable	Valor	Costo reducido / Valor marginal
A	x_1	600	0
B	x_2	400	0
FRESADO	x_3	200	0
TORNEADO	x_4	0	200
PULIDO	x_5	180	0
REQ.MIN	x_6	0	280
FUNCIÓN OBJETIVO		$ 152000	

Como puede observarse, el excedente x_6 por sobre el mínimo impuesto de 600 unidades para el producto A es cero, por lo que podría obtenerse un mejor resultado si no se impusiera dicha limitación. En consecuencia, asociado a esta restricción habrá un valor marginal distinto de cero ($280 por cada unidad de A).

La interpretación económica del valor marginal de la restricción del requerimiento mínimo es cualquiera de las siguientes:

a) Si se liberara en una unidad la restricción (es decir, si en lugar de 600 unidades, la restricción fuera de 599), el funcional aumentaría en $ 280.

b) Se podría pagar hasta $ 280 para comprar una unidad de A a un tercero que la ofrezca, a fin de satisfacer ese requerimiento mínimo.

c) El valor del funcional del problema sin la restricción era de $166000, mientras que con la restricción es de $152000 (es decir, una diferencia de $14000 por mes). Quiere decir, que si a cada una de estas 50 unidades de más se les pudieran incrementar el precio de venta en más de $280, se recuperarían los $14000.

d) Si se vendieran los recursos asociados a la fabricación de piezas A, el precio de venta de esos recursos se tiene que incrementar en y_6 a fin de poder cumplir con el compromiso contraído de entregar por lo menos 600 unidades de A, tal como se puede observar en la primera restricción de la formulación dual cuando se agrega la restricción de mínimo:

MIN $1800\, y_1 + 1600\, y_2 + 800\, y_3 - 600\, y_6$

Sujeto a
A) $1\, y_1 + 2\, y_2 + 0.5\, y_3 - y_6 \geq 120$
B) $2{,}5\, y_1 + y_2 + 0.8\, y_3 \geq 200$

con $y_j \geq 0$

Problemas de minimización

En un problema de minimización de un objetivo económico, el valor marginal (precio sombra) representa la disminución del costo por el hecho de relajar en una unidad la restricción "b".

Para una restricción de mayor o igual de un requerimiento, el valor marginal es el precio que se estaría dispuesto a pagar por cada unidad de requerimiento. Del mismo modo, constituye el precio mínimo de venta de cada unidad de requerimiento a un tercero.

Cuando el valor marginal es cero, significa que hay excedente del requerimiento "b" y, en consecuencia, no habría necesidad de adquirirlo, por lo que el precio de compra es cero.

El costo de oportunidad ("costo reducido") para los problemas de minimización mantiene el mismo significado que se explicó más arriba, representando el perjuicio que se ob-

tiene en el funcional por cada unidad que se active la variable cuando la solución óptima del problema indique que dicha actividad debe ser nula. Si, por ejemplo, la variable x representa la cantidad a adquirir de un producto, y la solución óptima establece que no se debe comprar dicho producto, el costo de oportunidad estaría representando el descuento que se debería obtener en el precio unitario de compra para que convenga adquirirlo.

Nuevamente, las restricciones de mayor o igual son naturales en los problemas de minimización, mientras que las de menor o igual son relativamente excepcionales.

Ejemplo 4.9:

Un productor debe alimentar a un animal que requiere semanalmente 200 unidades de nitrato, 120 unidades de fósforo y 100 unidades de potasio. A tal fin se puede disponer de los alimentos A y B, cuyos costos en $/Kg son 5 y 8 respectivamente. Cada Kg de alimento A proporciona 5 unidades de nitrato, 10 de fósforo y 8 de potasio, mientras que cada Kg de alimento B aporta 15 unidades de nitrato, 12 de fósforo y 4 de potasio. El objetivo del productor es determinar qué cantidad de alimento A y qué cantidad de alimento B deberá suministrar a cada animal semanalmente a fin de satisfacer los requerimientos mínimos de nitrato, fósforo y potasio minimizando el costo.

Resolución:

El productor se plantea el siguiente programa lineal:

MIN $5 x_1 + 8 x_2$

Sujeto a:

NI) $5 x_1 + 15 x_2 \geq 200$

FO) $10 x_1 + 12 x_2 \geq 120$

PO) $8 x_1 + 4 x_2 \geq 100$

con las variables x_1 y $x_2 \geq 0$

La solución de este problema lleva al siguiente resultado:

Componente / Mineral	Variable	Valor	Costo reducido / Valor marginal
A	x_1	7	0
B	x_2	11	0
NITRATO	x_3	0	0.44
FÓSFORO	x_4	82	0
POTASIO	x_5	0	0.35
FUNCIÓN OBJETIVO		$ 123	

Es decir, la cantidad de alimento A que deberá adquirir semanalmente para alimentar a cada animal es de 7 Kg y de alimento B, 11 Kg. De esta forma el requerimiento de nitrato estará satisfecho en su valor mínimo de 200 unidades (ya que el excedente es cero), el requerimiento de fósforo estará excedido en 82 unidades por sobre las 120 necesarias y el requerimiento de potasio estará en su valor mínimo de 100 unidades.

El valor marginal de 0.44 implica que si se redujera en una unidad el requerimiento de nitrato, el valor del funcional —es decir el costo— disminuiría en $ 0.44. De igual manera, por cada unidad que se redujera la necesidad semanal de potasio, el funcional bajaría $ 0.35.

Finalmente, como hay excedente de fósforo, el funcional no se modificaría si se cambiara en una unidad el requerimiento mínimo.

En otras palabras, el monto de \$ 0.44 es el valor que tiene para el productor cada unidad de nitrato. A ese precio estaría dispuesto a vender, si pudiera, una unidad de nitrato a un tercero interesado en comprarla. Del mismo modo, \$ 0 es el precio mínimo al que se debería vender cada unidad de fósforo y \$ 0.35 el precio mínimo al que se debería vender cada unidad de potasio.

La formulación del problema dual se podría interpretar de la siguiente forma: Si el productor tuviera la posibilidad de adquirir por algún otro medio los compuestos químicos requeridos para sus animales (a través de otros alimentos u otras formas de suministro), se preguntaría cuál debería ser el precio máximo de compra que debería pagar por cada unidad de nitrato, de fósforo y de potasio. Es evidente que como máximo estaría dispuesto a pagar \$123 por semana por animal.

El producto matemático $5\ y_1$ representa el precio que debería pagar el productor por las unidades de nitrato que proporciona cada unidad (Kg) de alimento A. Del mismo modo, $10\ y_2$ es el precio que se debería pagar como máximo por las unidades de fósforo que proporciona cada Kg de alimento A y, finalmente $8\ y_3$ es lo que se debería pagar por las unidades de potasio que proporciona cada Kg de A. En consecuencia, $5\ y_1 + 10\ y_2 + 8\ y_3$ es el precio máximo que se debería pagar por comprar los minerales que proporciona un Kg de A. Por supuesto que este valor debe ser menor a lo que se paga actualmente por un Kg de A, es decir:

$$5\ y_1 + 10\ y_2 + 8\ y_3 \leq 5$$

Del mismo modo, el precio que se debería pagar por adquirir de alguna otra forma los minerales que proporciona un Kg de B debe ser menor a lo que se paga actualmente por un Kg de B:

$$15\ y_1 + 12\ y_2 + 4\ y_3 \leq 8$$

Finalmente, el objetivo debe ser pagar como máximo lo que se paga actualmente por alimentar a un animal:

$$\text{MAX } 200\ y_1 + 120\ y_2 + 100\ y_3$$

En resumen, la formulación dual del este problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{MAX} & 200\ y_1 + 120\ y_2 + 100\ y_3 \\ \text{Sujeto a} & 5\ y_1 + 10\ y_2 + 8\ y_3 \leq 5 \\ & 15\ y_1 + 12\ y_2 + 4\ y_3 \leq 8 \\ \text{con} & y_i \geq 0 \end{array}$$

La solución a este problema dual es:

Mineral/ Componente	Variable	Precio	Valor
NITRATO	y_1	0.44	0
FÓSFORO	y_2	0	82
POTASIO	y_3	0.35	0
A	y_4	0	7
B	y_5	0	11
FUNCIÓN OBJETIVO		$ 123	

Al incorporar una variable *slack* a la restricción de A tendremos:

$5 y_1 + 10 y_2 + 8 y_3 - y_4 = 5$

Dado que $5 y_1 + 10 y_2 + 8 y_3$ es el precio máximo de compra que el productor debe pagar por conseguir la cantidad de minerales equivalentes a los que proporciona un Kg de A y que el término independiente 5 es lo que se paga actualmente por un Kg de A, el valor de y_4 nos indica lo que se estaría pagando de más por adquirir los minerales a través del producto A. En este caso y_4 es cero, lo que nos indica que es conveniente adquirir el producto A. Si, por el contrario y_4 fuera positivo, no sería conveniente adquirir ninguna unidad de A y sí se debería procurar obtener los minerales a través de una fuente alternativa.

El mismo análisis se puede hacer con el alimento B, concluyendo para el ejemplo que es conveniente su adquisición.

Ejemplo 4.10:

Supongamos que al problema del ejemplo 4.9, se agregue la restricción de que no se puede adquirir más de 10 unidades de B.

Resolución:

La formulación directa del problema quedaría entonces:

$$
\begin{array}{lr}
\text{MIN} & 5 x_1 + 8 x_2 \\
\text{Sujeto a:} & \\
\text{NI)} & 5 x_1 + 15 x_2 \geq 200 \\
\text{FO)} & 10 x_1 + 12 x_2 \geq 120 \\
\text{PO)} & 8 x_1 + 4 x_2 \geq 100 \\
\text{REQ. MAX)} & x_2 \leq 10 \\
\text{con } x_i \geq 0 &
\end{array}
$$

El resultado óptimo de este problema es el siguiente:

Componente / Mineral	Variable	Valor	Costo reducido/ Valor marginal
A	x_1	10	0
B	x_2	10	0
NITRATO	x_3	0	1
FÓSFORO	x_4	100	0
POTASIO	x_5	20	0
REQ. MAX	x_6	0	7
FUNCIÓN OBJETIVO		$ 130	

Puede observarse aquí que por cada Kg adicional que se pudiera adquirir de B por encima de los 10 Kg impuestos, el costo total por semana de alimentar a un animal se reduciría en $7.

El planteo dual de este problema es:

MAX	$200\,y_1 + 120\,y_2 + 100\,y_3 - 10\,y_6$
Sujeto a	$5\,y_1 + 10\,y_2 + 8\,y_3 \leq 5$
	$15\,y_1 + 12\,y_2 + 4\,y_3 - y_6 \leq 8$
con	$y_i \geq 0$

Restricciones de igual

Las restricciones de igual se pueden presentar naturalmente en problemas de maximización y de minimización. Como hemos visto, los valores marginales de los vectores λ_j correspondientes a igualdades pueden ser positivos o negativos. Si el valor marginal es positivo, significa que relajar la igualdad en una unidad implica una mejora en el funcional. Si, en cambio, es negativo, relajar la igualdad en una unidad implica un perjuicio en el funcional.

Para un problema de máximo, relajar la igualdad significa aumentar en una unidad la limitación. Por ejemplo, si para la restricción $x_1 + x_2 + x_5 = 10$ el valor marginal correspondiente fuera 4, significa que el funcional aumentaría en 4 unidades si el término independiente fuera 11 (en lugar de 10). Si, en cambio, el valor marginal fuera -4, esto significa que al aumentar a 11 el RHS, el funcional se reduciría en 4 unidades.

Para un problema de mínimo, relajar la igualdad significa disminuir en una unidad la limitación. Por ejemplo, si para la siguiente restricción $x_1 + x_2 + x_5 = 10$ el valor marginal fuera igual a 3, esto significa que el funcional se reduciría en tres unidades si el término independiente fuera 9 (en lugar de 10). Si en cambio, el valor marginal fuera igual a -3, significa que el funcional se incrementaría en 3 unidades si el RHS fuera 9.

Ejemplo 4.11:

Supongamos una empresa que puede fabricar 3 productos P1, P2 y P3 para los que se requiere recursos de mano de obra (MO), materia prima (MP) y maquinaria (MA). Existen restricciones de disponibilidad de los recursos (DMi), limitaciones comerciales de cantidad mínima del producto P3 (MN3) y de cantidad máxima del producto P2 (MX2) a elaborar por mes.

Los datos se indican en la siguiente tabla:

Producto Recurso/limitación	P1	P2	P3	Costo	Disponibilidad mensual
MO	5 hs	4hs	6hs	4 $/h	1200
MP	0,2 Kg	0,3 Kg	0,1 Kg	1 $/Kg	300
MA	1,1 hs	0,8 hs	1,3 hs	15 $/h	800
MN3			70 u		
MX2		200 u			
Precio de venta unitario	500 $	400 $	600 $		

Resolución:

Se utilizará el sistema de programación lineal LINDO para resolver este problema. La formulación matemática (en el formato LINDO) del problema es la siguiente:

```
MAX    500 P1 + 400 P2 + 600 P3 - 4 MO - 1 MP - 15 MA
ST
MO)      5 P1 + 4 P2 + 6 P3  - MO = 0              (y1)
DMO)     MO <  1200                                (y2)
MP)     0.2 P1  +  0.3 P2 + 0.1 P3   - MP = 0      (y3)
DMP)     MP <  300                                 (y4)
MA)     1.1 P1 + 0.8 P2 + 1.3 P3 - MA = 0          (y5)
DMA)     MA <    800                               (y6)
MX2)      P2 < 200                                 (y7)
MN3)      P3 > 70                                  (y8)
END
```

A la derecha, entre paréntesis (no es parte de la formulación en LINDO) se han indicado los nombres de las variables duales (y_i) para una mejor comprensión de la formulación dual.

La formulación dual del problema sería la siguiente:

MIN $1200\, y_2 + 300\, y_4 + 800\, y_6 + 200\, y_7 - 70\, y_8$

Sujeto a

P1) $5\, y_1 + 0.2\, y_3 + 1.1\, y_5 \geq 500$

P2) $4\, y_1 + 0.3\, y_3 + 0.8\, y_5 + y_7 \geq 400$

P3) $6\, y_1 + 0.1\, y_3 + 1.3\, y_5 - y_8 \geq 600$

MO) $y_1 - y_2 \leq 4$

MP) $y_3 - y_4 \leq 1$

MA) $y_5 - y_6 \leq 15$

Para resolver el problema se puede hacer tanto por el directo como por el dual. Con el sistema LINDO se resolvió el problema directo, siendo la salida de la solución óptima la siguiente:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP    3
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)    111429.5
 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     P1          0.0000000        1.325000
     P2        195.0000000        0.000000
     P3         70.000000         0.000000
     MO       1200.000000         0.000000
     MP         65.500000         0.000000
     MA        247.000000         0.000000

     ROW           SLACK          DUAL PRICES
     MO)          0.000000        96.925003
     DMO)         0.000000        92.925003
     MP)          0.000000         1.000000
     DMP)       234.500000         0.000000
     MA)          0.000000        15.000000
     DMA)       553.000000         0.000000
     MX2)         5.000000         0.000000
     MN3)         0.000000        -1.150000
```

En la primera columna se indican los nombres de las variables directas. Con el nombre VARIABLE se muestran las variables reales, mientras que con el nombre ROW se muestran las variables *slacks* (cuyo nombre es el que se le dio a la restricción).

En la segunda columna se indican los valores óptimos de las variables.

A partir de la lectura de los valores de las variables reales, puede observarse que no conviene fabricar P1, la producción óptima de P2 es 195 unidades por mes y la de P3 de 70. La utilización mensual de la mano de obra es de 1200 horas, de la materia prima 65.50 Kg, y de maquinaria 247 horas.

A partir de la lectura de los valores de las variables *slacks*, se observa que no hay sobrante de mano de obra (DMO), que sobran 234.50 Kg por mes de materia prima (DPM) y que sobran 553 horas de máquina (DMA). Obviamente, el sobrante o excedente de las restricciones de igual es cero (MO, MP y MA). No se alcanza la limitación máxima de P2 (hay un sobrante de 5 unidades con respecto a dicho límite) y se realiza exactamente la cantidad mínima de P3 exigida (el excedente con respecto al mínimo impuesto es cero).

En la tercera columna, se consignan los valores de las variables duales correspondientes, es decir, los costos de oportunidad (llamados REDUCED COST por el LINDO) y los valores marginales (llamados DUAL PRICES). La interpretación de las variables duales de la solución óptima del problema es la siguiente:

El costo reducido del producto P1 es $1.325. Esto significa que:

1. por cada unidad que se fabrique el funcional decrecerá en ese valor.
2. si se pudiera aumentar el precio de venta de P1 a más de $ 501.325 el producto P1 debería fabricarse.
3. si se pudiera disminuir el costo de los insumos de P1 en más de $ 1.325, el producto P1 debería fabricarse.
4. si se vendieran los recursos que insume una unidad de P1 se debería hacer a los siguientes valores:

$y_1 =$ 96.925 \$ / hora de mano de obra
$y_3 =$ 1 \$ / Kg de materia prima
$y_5 =$ 15 \$ / hora de maquinaria

para obtener un ingreso de \$501.325 en lugar de dedicarlos a la fabricación de P1 que retorna un ingreso de \$ 500.

El valor marginal de la disponibilidad de la mano de obra (DMO) es de 92.925003. Esto significa que

a) si la disponibilidad de la mano de obra aumentara en una hora, el funcional se incrementaría en \$92.925003.
b) el precio mínimo de venta de la mano de obra a un tercero sería igual a este valor.

El valor marginal de la ecuación de balance de mano de obra es de 96,92503. Esto implica que si la mano de obra fuera una hora más eficiente, el beneficio que se obtendría es de \$96,92503. En efecto, la ecuación correspondiente a la utilización de mano de obra, es:

$$5\ P1 + 4\ P2 + 6\ P3 - MO = 0$$

La solución óptima nos da una utilización de $5 \,.\, 0 + 4 \,.\, 195 + 6 \,.\, 70 = 1200$ hs.

Si la utilización de la mano de obra para fabricar piezas se redujera una hora, el funcional se incrementaría en 96.925003 \$. Esto se interpreta de la siguiente forma:

$$5\ P1 + 4\ P2 + 6\ P3 - MO = 1$$

o visto de otra forma:

$$5\ P1 + 4\ P2 + 6\ P3 - 1 = MO$$

Otra interpretación del valor marginal de la ecuación de la mano de obra (MO) es el precio máximo que se podría pagar por mejorar la eficiencia de este recurso para la producción óptima. Por ejemplo, si una consultora en ingeniería industrial asegura que se puede mejorar los tiempos de fabricación de la mano de obra, se le podría pagar hasta ese valor por cada hora que pueda reducir por mes.

Finalmente, ese mismo valor se puede interpretar como el precio de venta mínimo que se podría vender a un tercero la hora de mano de obra, al que habría que descontar los \$4 que se pagan actualmente (es decir \$92.92503).

La diferencia entre 96.925003 (MO) y 92.925003 (DMO) es justamente los \$ 4 que se paga la hora de mano de obra.

La restricción dual es

$$y_1 - y_2 \leq 4$$

que obviamente para este problema es una restricción de igual (ya que el valor directo de la MO es distinto a cero y por consiguiente $y_{12} = 0$).

Es decir, el precio de venta que se pagaría por 1 hora de MO menos los \$4 que se pagan actualmente representa el beneficio que se obtendría por 1 hora más de MO (y_2).

El valor marginal de la disponibilidad de materia prima (DPM) es cero ya que hay un sobrante. Por su parte, el valor marginal de la utilización de este recurso (MP) es igual a 1. Esto significa que si se pudiera hacer un mejor aprovechamiento de la materia prima (es decir consumir un Kg. menos por mes) se obtendría un beneficio de \$1 (que es lo que actualmente se paga cada Kg).

Del mismo modo, existe un sobrante de maquinaria, por lo que el precio sombra de la disponibilidad (DMA) de este recurso es cero y el de la utilización (MA) es igual a lo que actualmente cuesta ($15 por hora).

Con respecto a la restricción de producción máxima del producto P2, como existe un sobrante no tiene valor marginal.

Finalmente, la producción mínima del producto P1 da un valor marginal igual a 1.15. El LINDO muestra a este valor en forma negativa (distinto a como se observaría en el *Simplex*). La interpretación de este valor es que si se redujera el requerimiento mínimo de 70 unidades a 69, el beneficio se incrementaría en $1.15. El LINDO expresa todos los valores marginales como la variación en el funcional por cada unidad que se incrementa la restricción. Es por eso que muestra un valor negativo, entendiéndose que si el requerimiento mínimo del producto P3 fuera de 71 (en lugar de 70), el beneficio se reduciría en $1.15.

Ejemplo 4.12:

En algunas ocasiones conviene resolver el problema mediante el planteo dual en lugar de hacerlo a través del directo. Esto ocurre cuando la formulación original del problema tiene una gran cantidad de restricciones de mayor o igual, las que requieren la utilización de variables artificiales para la aplicación del algoritmo del *Simplex*, en general cuando el objetivo es de minimización.

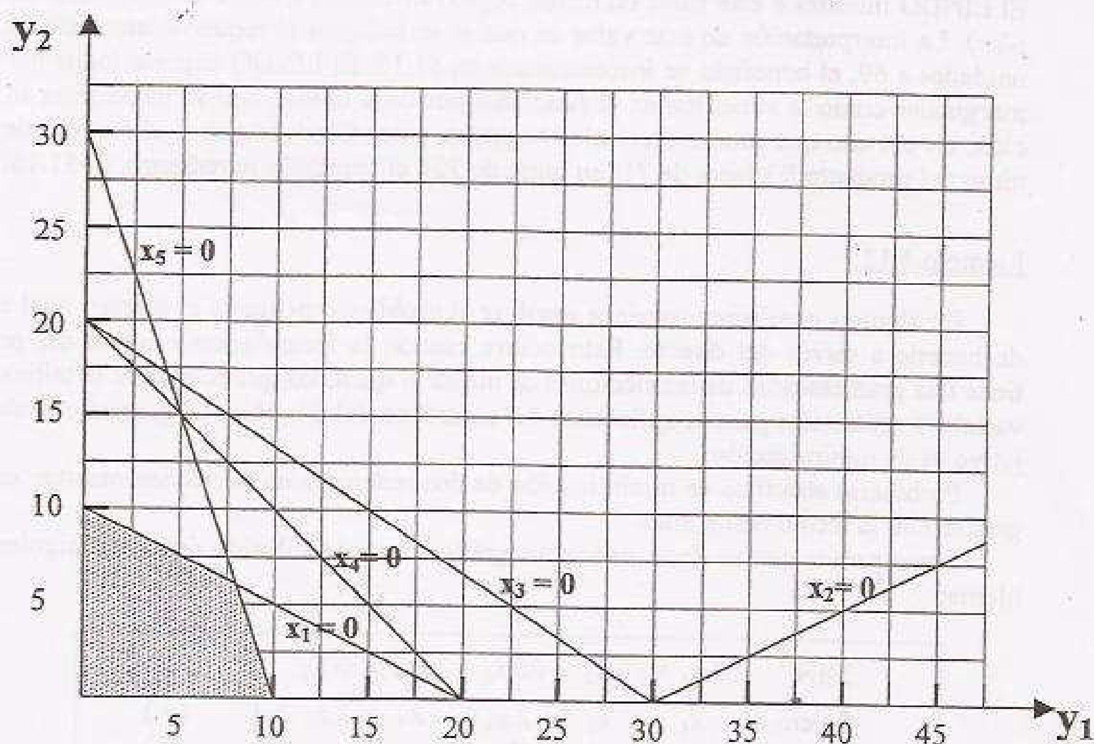
Problemas sencillos de minimización de dos restricciones se pueden resolver en forma gráfica con la formulación dual.

Supongamos que se desea encontrar gráficamente la solución óptima al siguiente problema:

MIN	$20\,x_1 + 30\,x_2 + 60\,x_3 + 20x_4 + 30\,x_5$	
Sujeto a	$x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 + 3\,x_5 \geq 4$	(y_1)
	$2\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$	(y_2)
con	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	

Como la formulación dual tiene solamente dos variables directas, el problema se puede resolver gráficamente. La formulación dual es la siguiente:

MAX	$4\,y_1 + 3\,y_2$	
Sujeto a	$y_1 + 2\,y_2 \leq 20$	(x_1)
	$y_1 - 2\,y_2 \leq 30$	(x_2)
	$2\,y_1 + 3\,y_2 \leq 60$	(x_3)
	$y_1 + y_2 \leq 20$	(x_4)
	$3\,y_1 + y_2 \leq 30$	(x_5)
con	$y_1, y_2 \geq 0$	



El resultado es $y_1 = 8$ e $y_2 = 6$. En consecuencia, el hecho de que y_1 e y_2 sean distintos de cero implica que la dos restricciones directas están en el límite (es decir, justo en el igual), por lo que $x_6 = 0$ y $x_7 = 0$. Las otras variables duales y_4, y_5, y_6 son distintas de cero. Por lo tanto, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, quedando el problema directo reducido a:

$$\begin{aligned} x_1 + 3\,x_5 &= 4 \\ 2\,x_1 + \,x_5 &= 3 \end{aligned}$$

es decir, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que lleva al siguiente resultado: $x_1 = 1$, $x_5 = 1$.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

Una vez alcanzada la solución óptima, se pueden realizar los denominados análisis de sensibilidad o estudios post-optimales, que consisten básicamente en responder preguntas del tipo "¿qué pasaría si...?", tales como:

- ✓ ¿Qué pasaría si se modificara el valor de un coeficiente de la función objetivo?
- ✓ ¿Qué pasaría si se modificara el valor de un término independiente?
- ✓ ¿Qué pasaría si se agregara una nueva actividad al problema?
- ✓ ¿Qué pasaría si se agregara una nueva restricción al problema?

La ventaja del algoritmo del *Simplex* es que los estudios de sensibilidad surgen a partir de la solución óptima, sin necesidad de tener que resolver el problema desde su inicio. Esto permite reducir significativamente el tiempo de resolución puesto que el punto de partida consiste en una base inicial que va a estar mucho más cerca de la nueva solución (si es que se modifica) de lo que está la base correspondiente al origen de coordenadas.

Típicamente se pueden estudiar variaciones en los parámetros del problema y modificaciones en su estructura.

El primer caso se conoce como "análisis paramétrico" que consiste en observar las variaciones que se producen en la solución recomendada cuando se modifican los valores de los parámetros (principalmente, coeficientes del funcional y términos independientes).

En el segundo caso, se plantean agregados de nuevas actividades o de nuevas restricciones a la formulación original.

5.1 VARIACIONES EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Tomaremos como ejemplo un problema de maximización con tres restricciones de menor o igual, cuya formulación es:

MAX:	$c_1 x_1 + c_2 x_2$
Sujeto a:	$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$
	$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2$
	$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq b_3$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

El hecho de modificar el valor de un coeficiente de eficiencia (por ejemplo c_1) no altera el sistema de ecuaciones del problema directo. El recinto de soluciones factibles es el mismo; lo que sí cambia es la pendiente del funcional. Dependiendo del cambio verificado en la pendiente de la función objetivo, la solución puede permanecer en la misma base o pasar a otro punto extremo.

El sistema de ecuaciones del problema dual, en cambio, se modifica cuando cambia el coeficiente c_1; en efecto:

MIN:	$b_1\, y_1 + b_2\, y_2 + b_3\, y_3$
Sujeto a:	$a_{11}\, y_1 + a_{21}\, y_2 + a_{31}\, y_3 \geq c_1$
	$a_{12}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + a_{32}\, y_3 \geq c_2$
con	$y_1, y_2 \geq 0$ y continuas

En consecuencia se debe utilizar la tabla óptima primal como punto de partida para saber qué pasaría si se modifica un coeficiente del funcional.

Veamos el ejemplo de Tratamiento Térmico, Maquinaria y Mano de Obra. La formulación original del problema era:

MAX:	$400\, x_1 + 300\, x_2$
Sujeto a:	$9\, x_1 + 18\, x_2 \leq 720$
	$16\, x_1 + 8\, x_2 \leq 640$
	$10\, x_1 + 10\, x_2 \leq 480$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

que daba como resultado la siguiente solución óptima directa:

		c_j	400	300	0	0	0	
C_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	
400	x_1	32	1			0.125	-0.1	
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	
Z = 17600			0	0	0	12.5	20	z_j-c_j

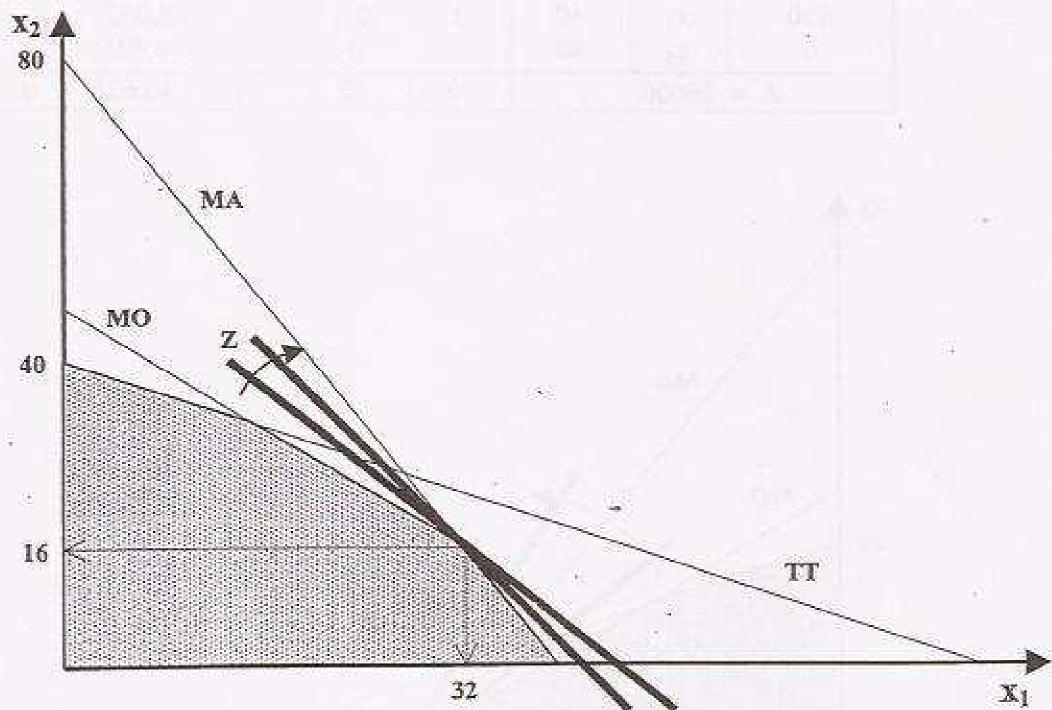
Supongamos que se quisiera analizar qué pasaría si se modifica la utilidad unitaria de las piezas A a $550 (en lugar de los $400 actuales). Es obvio que se modificará la última fila (funcional y valores duales), pero ¿se modificará la solución óptima directa propuesta? Para responder a esta pregunta reemplazamos el coeficiente $c_1= 400$ por $c_1= 550$ en la solución óptima y simplemente calculamos la última fila.

		c_j	550 ~~400~~	300	0	0	0	
C_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	
550 ~~400~~	x_1	32	1			0.125	-0.1	
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	
Z = ~~17600~~			0	0	0	~~12.5~~	~~20~~	z_j-c_j
Z = 22400			0	0	0	31.25	5	z_j-c_j

Como todos los z_j-c_j son positivos (para un problema de maximización), la solución óptima no se modifica, es decir sigue siendo:

$$X = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 144 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gráficamente vemos que la pendiente del funcional no cambió lo suficiente como para que se modifique la solución óptima del punto B.



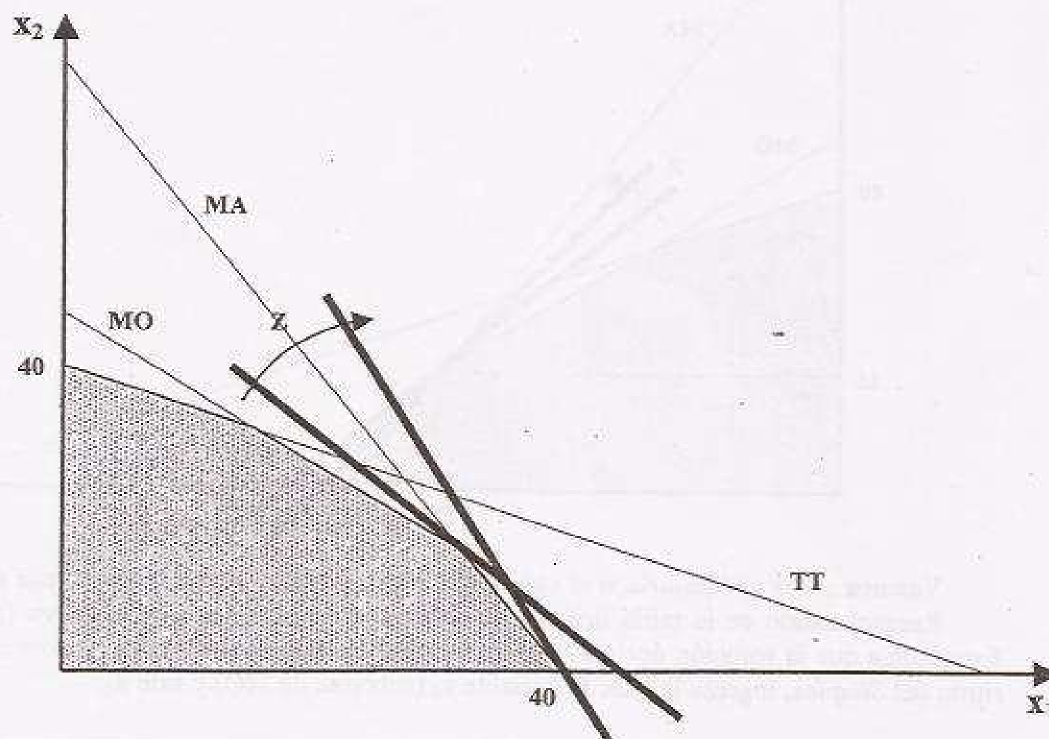
Veamos ahora qué pasaría si el valor de c_1 fuera, en cambio, igual a $650 por unidad.

Reemplazando en la tabla óptima, se observa que existe un z_j-c_j negativo (para A_5). Esto indica que la solución óptima propuesta debe cambiar. Procediendo conforme al algoritmo del *Simplex*, ingresa la base la variable x_5 (sobrante de MO) y sale x_2.

		c_j	650 ~~400~~	300	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	
650 ~~400~~	x_1	32	1			0.125	-0.1	
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	80
Z = ~~17600~~			0	0	0	~~12.5~~	~~20~~	z_j-c_j
Z = 25600			0	0	0	43.75	-5	z_j-c_j
							⇑	

Haciendo el cambio de base correspondiente, llegamos a la nueva solución óptima para el valor de $c_1 = 650$.

		c_j	650	300	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	360		13.5	1	-0.5625		
650	x_1	40	1	0.5		0.0625		
0	x_5	80		5		-0.6250	1	
Z = 26000			0	25	0	40.625	0	z_j-c_j



Es decir,

$$X = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 360 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Gráficamente, esta solución se corresponde con el punto A.

5.2 VARIACIONES EN LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES (RHS)

Modificar un término independiente, implica modificar el recinto de soluciones factibles.

Un valor diferente de un RHS, por ejemplo b_2, implica un desplazamiento en forma paralela de la recta correspondiente. Esto es así porque se modifica el sistema de ecuaciones del problema directo:

MAX:	$c_1 x_1 + c_2 x_2$
Sujeto a:	$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$
	$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2$
	$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq b_3$
con	$x_1, x_2 \geq 0$ y continuas

Sin embargo, no se modifica el sistema de ecuaciones del problema dual, ya que en esta formulación los b_i afectan solamente al funcional, y en consecuencia una variación de b_i implicará solamente un cambio de pendiente de la función objetivo pero no del recinto de soluciones duales factibles; en efecto:

MIN:	$b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3$
Sujeto a:	$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 \geq c_1$
	$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \geq c_2$
con	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$ y continuas

Esto significa que se debe utilizar la tabla óptima dual como punto de partida para saber qué pasaría si se modificara un término independiente.

Volviendo al ejemplo, el programa dual correspondiente es:

MIN:	$720\ y_1 + 640\ y_2 + 480\ y_3$
Sujeto a:	$9\ y_1 + 16\ y_2 + 10\ y_3 \geq 400$
	$18\ y_1 + 8\ y_2 + 10\ y_3 \geq 300$
con las $y_i \geq 0$	

Supongamos que se desea saber qué pasaría si la disponibilidad de MA pasara de 640 a 700 hs por mes. Es obvio que la solución directa variaría, pero ¿se mantendría la solución dual (es decir los valores de las variables marginales y costos de oportunidad)?

A fin de responder a este interrogante, debemos trabajar con la solución óptima dual. Para ello, debemos pasar primero de la tabla óptima directa:

		c_j	400	300	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	
400	x_1	32	1			0.125	-0.1	
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	
Z = 17600			0	0	0	12.5	20	z_j-c_j
			y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	

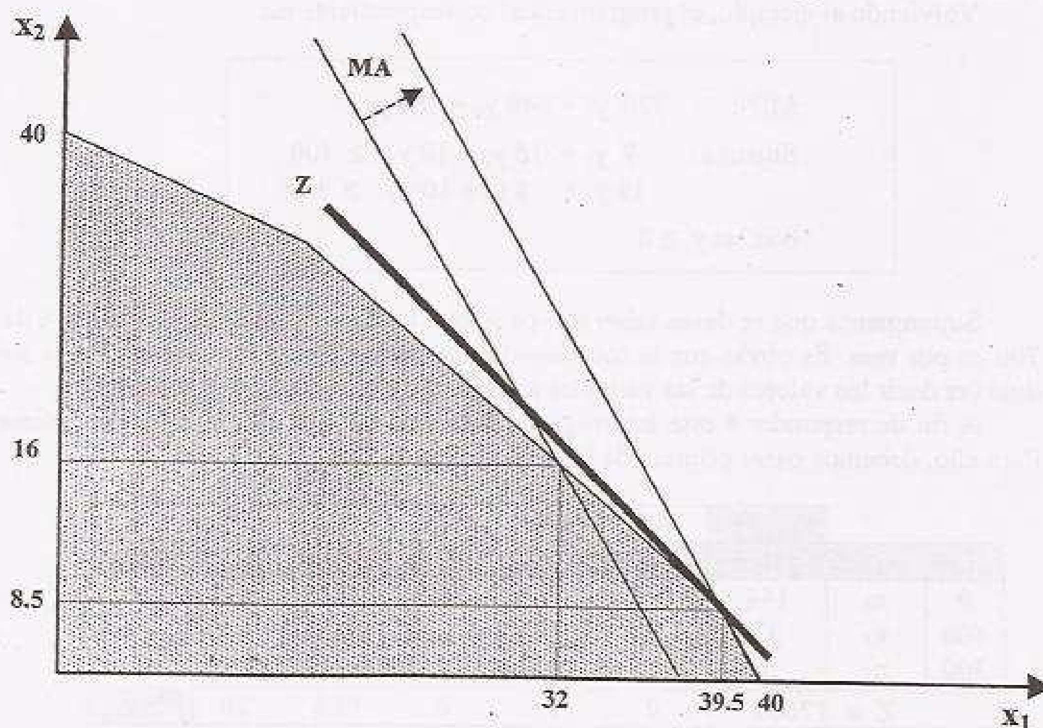
a la tabla óptima dual, lo que nos da como resultado:

		b_i	720	640	480	0	0	
B_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
640	y_2	12.5	-1.125	1		-0.125	0.125	
480	y_3	20	2.7		1	0.1	-0.2	
	Z = 17600		-144			-32	-16	z_i-b_i
			x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	

Luego se modifica el valor de b_2 y se observa si cambia la solución dual óptima:

		b_i	720	700 ~~640~~	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
700 ~~640~~	y_2	12.5	-1.125	1		-0.125	0.125	
480	y_3	20	2.7		1	0.1	-0.2	
	Z = ~~17600~~		~~-144~~			~~-32~~	~~-16~~	z_i-b_i
	Z = 18350		-211.5			-39.5	-8.5	z_i-b_i

Gráficamente vemos que si bien la recta de MA se desplazó hacia arriba, el dual no alcanzó a modificarse, ya que la variación de funcional por cada unidad adicional de mano de obra sigue siendo la misma (12,5 \$/h).



Supongamos, en cambio, que se quisiera analizar qué pasaría si la disponibilidad de horas máquina fuera de 800 por mes.

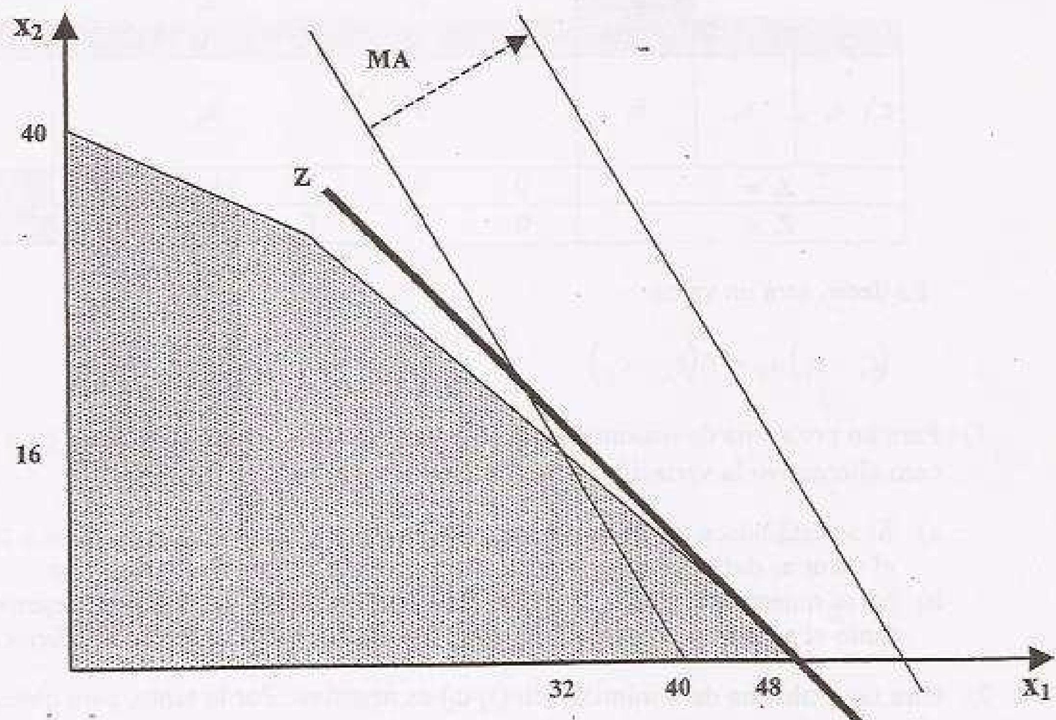
		b_i	720	800 ~~640~~	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
800 ~~640~~	y_2	12.5	-1.125	1		-0.125	0.125	
480	y_3	20	2.7		1	0.1	-0.2	
	Z =	~~17600~~	~~-144~~			~~-32~~	~~-16~~	z_j-b_j
	Z =	19600	- 396			- 52	4 ⇑	z_j-b_j

Como hay una variable z_j-b_j positiva, procedemos a efectuar el cambio de base, lo que nos lleva a la siguiente solución óptima dual:

		b_i	720	800	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
0	y_5	100	-9	8		-1	1	
480	y_3	40	0.9	1.6	1	-0.1		
	Z =	19200	-288	-32	0	-48	0	z_j-b_j

En este caso, se modifica la solución dual (cambian los valores marginales y los costos de oportunidad). Vemos que entró en la base y_5 (lo que significa que en el directo se va de la base x_2, por lo que se deja de fabricar el producto B) y se fue y_2 (entra en la base x_4, por lo que habrá sobrante de Maquinaria).

Gráficamente:



5.3 RANGO DE VALIDEZ DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

En los ejemplos anteriores hemos visto que cuando modificábamos el coeficiente de eficiencia c_i a 550 la solución directa se mantenía, pero cuando lo variábamos a 650 la solución cambiaba.

Del mismo modo, al modificar b_2 (disponibilidad mensual de Maquinaria) a 700 hs se mantenía la estructura de la solución óptima, pero cambiaba si se llevaba a 800 hs por mes.

Resulta de interés especial conocer cuál es el valor del parámetro a partir del cual cambia la solución.

Para calcular los rangos de validez de las soluciones óptimas hay que distinguir si la variable del coeficiente que se modifica está o no en la base.

Variables que están en la base

El nuevo valor de c_i (que llamaremos c'_i) que hace que se produzca justo un cambio de base (solución alternativa) debe ser tal que genere un z_j-c_j igual a cero (cero alternativo) en el vector A_j de una de las variables no básicas, dejando al resto de los z_j-c_j no negativos (si se maximiza) o no positivos (si se minimiza).

		c_j		c_i		c_j	
c_k	x_k	B_k		A_i		A_j	b_i/a_{ij}
c'_i ~~c_i~~	x_i	b_i		1		a_{ij}	
Z =			0	0	0	~~zj-cj~~	z_j-c_j
Z =			0	0	0	0*	z_j-c_j

Es decir, será un valor

$$(c'_i - c_i)\,a_{ij} = \Delta(z_j - c_j)$$

1) Para un problema de maximización (z_j-c_j) es positivo. En consecuencia, para obtener un cero alternativo la variación Δ(z_j-c_j) debe ser negativa.

   a) Si se está buscando el límite superior, la diferencia (c'_i-c_i) es positiva y por lo tanto el valor a_{ij} debe ser negativo. En caso contrario no hay límite superior.
   b) Si se quiere determinar el límite inferior, la diferencia (c'_i-c_i) es negativa y por lo tanto el a_{ij} debe ser positivo. En caso contrario, no existe el límite inferior.

2) Para un problema de minimización (z_j-c_j) es negativo. Por lo tanto, para obtener un cero alternativo la variación Δ(z_j-c_j) debe ser positiva.

   a) Si se está buscando el límite superior, la diferencia (c'_i-c_i) es positiva y por lo tanto el valor a_{ij} debe ser positivo. En caso contrario no hay límite superior.
   b) Si se quiere determinar el límite inferior, la diferencia (c'_i-c_i) es negativa y por lo tanto el a_{ij} debe ser negativo. En caso contrario, no existe el límite inferior.

En resumen, despejando c'_i (que será el límite superior $c_{i\ sup}$ o el límite inferior $c_{i\ inf}$) y teniendo en cuenta que los z_j-c_j de los otros vectores de variables no básicas deben ser no negativos si se maximiza el objetivo o no positivos si se minimiza, tendremos que se debe seleccionar el vector correspondiente al mínimo cociente (z_j-c_j)/a_{ij}.

20/6/44

En consecuencia:

$$c_{i\,sup} = c_i + \left[\frac{(z_j - c_j)}{a_{ij}}\right]_{min} \quad (5.1) \qquad y \qquad c_{i\,inf} = c_i - \left[\frac{(z_j - c_j)}{a_{ij}}\right]_{min} \quad (5.2)$$

siendo los signos de los a_{ij} según se indica en la siguiente tabla:

	a_{ij}	
	MAX	MIN
Límite superior	-	+
Límite inferior	+	-

Veamos, entonces, cuáles son los límites superior e inferior para el coeficiente c_1 del ejemplo. Teniendo en cuenta que x_1 está en la base y que es un problema de maximización, tendremos:

$$c_{1\,sup} = 400 + \frac{20}{0.1} = 600 \qquad y \qquad c_{1\,inf} = 400 - \frac{12.5}{0.125} = 300$$

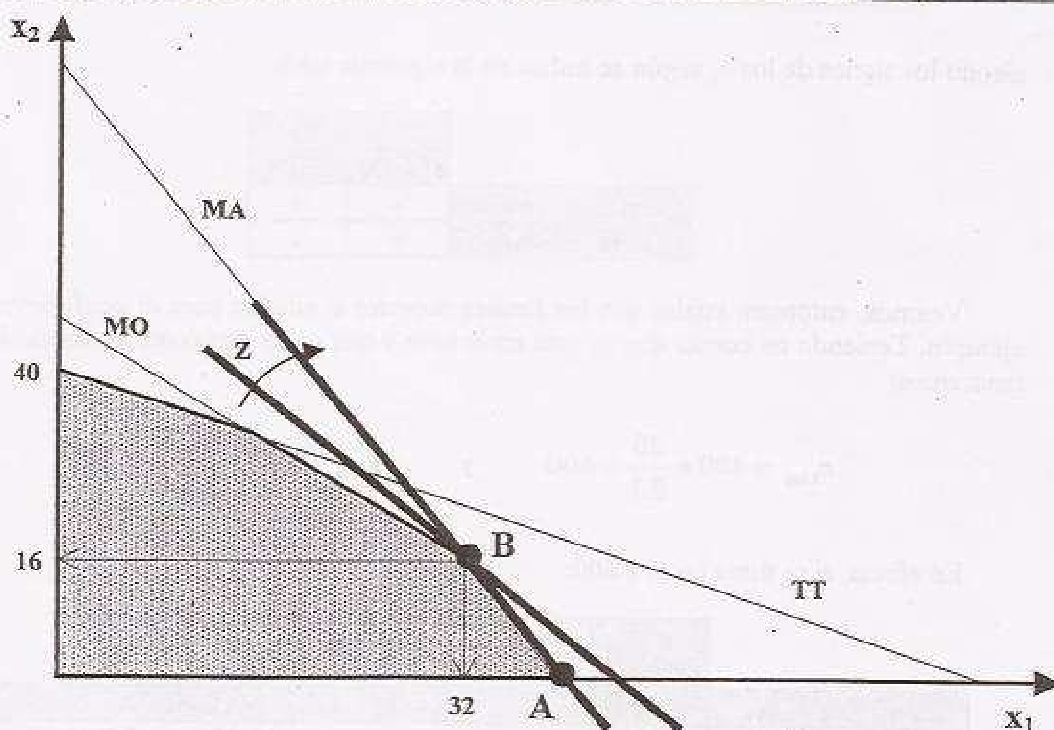
En efecto, si c_1 fuera igual a 600:

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
		c_j	600 ~~400~~	300	0	0	0	
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	-
600 ~~400~~	x_1	32	1			0.125	-0.1	-
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	80
Z = ~~17600~~			0	0	0	~~12.5~~	~~20~~	z_j-c_j
Z = 24000			0	0	0	37.5	0*	z_j-c_j

tendríamos una solución alternativa entre el punto B (indicado en la tabla) y el punto A que surge del cambio de base ingresando x_5 y anulando x_2:

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	360		13.5	1	-0.5625		
600	x_1	40	1	0.5		0.0625		
0	x_5	80		5		-0.625	1	
Z = 24000			0	0*	0	37.5	0	z_j-c_j

Si el valor de c_1 fuera apenas superior a 600, la solución óptima pasará a ser la base A. Gráficamente:



Veamos ahora, que pasa en el límite inferior de c_1, es decir cuando es igual a 300:

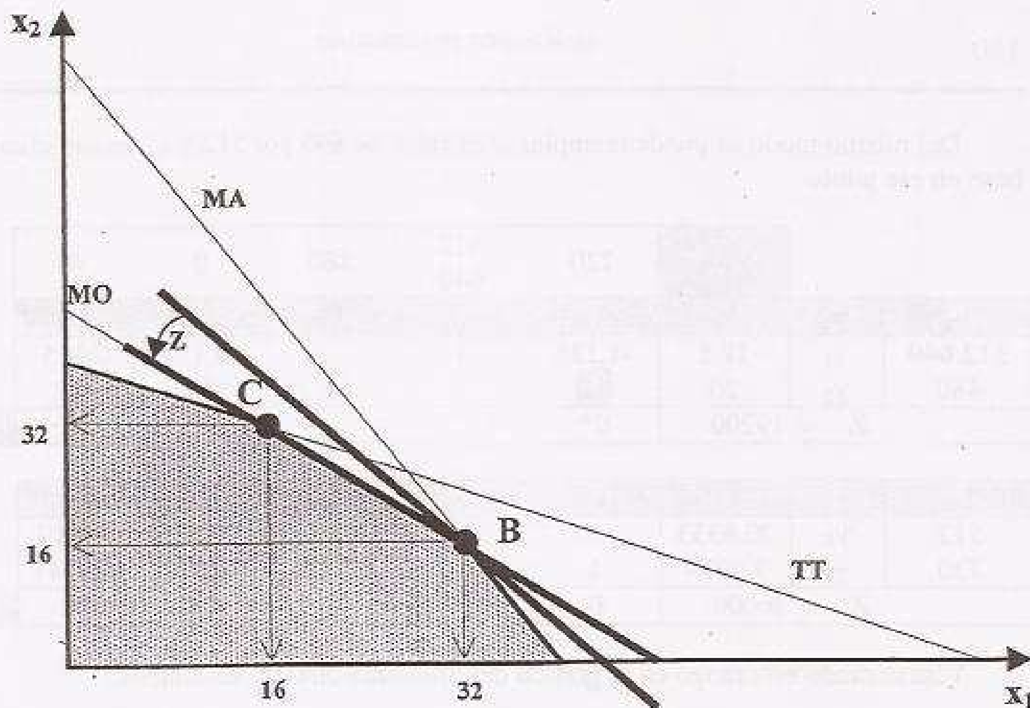
		c_j	300 ~~400~~	300	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	128
300 ~~400~~	x_1	32	1			0.125	-0.1	256
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	-
Z = ~~17600~~			0	0	0	~~12.5~~	~~20~~	z_j-c_j
Z = 14400			0	0	0	0*	30	z_j-c_j

En este caso también tendremos una solución alternativa entre la base indicada en la tabla anterior (punto B) y la siguiente base (punto C):

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_4	128			0.8889	1	-2.4	
300	x_1	16	1		-0.1111		0.2	
300	x_2	32		1	0.1111		-0.1	
Z = 14400			0	0	0*	0	30	z_j-c_j

Si el valor de c_1 fuera apenas inferior a 300, la solución óptima pasaría a ser definitivamente la base C. La solución gráfica se puede visualizar en la próxima página.

El mismo procedimiento de análisis se puede seguir para evaluar el rango de validez de los términos independientes dentro del cual no se modifica la solución dual propuesta (valores marginales y costos de oportunidad). Supongamos que se desea encontrar los límites superior e inferior del recurso de Mano de Obra (b_2).



Aquí el dual es un problema de minimización, por lo que se deberán tomar a_{ij} positivos cuando se está buscando el límite superior y negativos cuando se está buscando el límite inferior

$$b_{2\,sup} = 640 + \frac{16}{0.125} = 768$$

$$b_{2\,inf} = 640 - \left[\frac{32}{0.125}; \frac{144}{1.125}\right]_{min} = 512$$

En consecuencia, para el límite superior habrá solución alternativa entre las dos siguientes bases:

		b_i	720	768 ~~640~~	480	0	0	
B_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
768 ~~640~~	y_2	12.5	-1.125	1		-0.125	0.125	
480	y_3	20	2.7		1	0.1	-0.2	
	Z =	17600	-144			-32	-16	z_i-b_i
	Z =	19200	-288			-48	0*	z_i-b_i

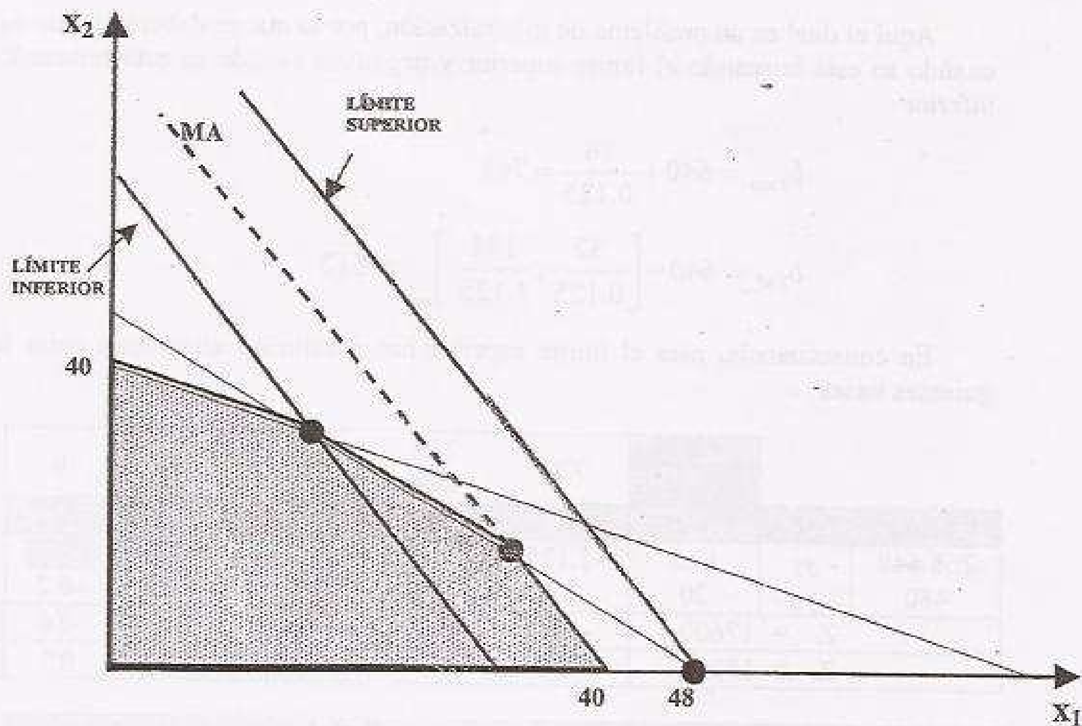
B_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
0	y_5	100	-9	8		-1	1	
480	y_3	40	0.9	1.6	1	-0.1		
	Z =	19200	-288	0*	0	-48	0	z_i-b_i

Del mismo modo se puede reemplazar el valor de 640 por 512 y observar el cambio de base en ese punto.

		b_j	720	512 ~~640~~	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
512 ~~640~~	y_2	12.5	-1.125	1		-0.125	0.125	
480	y_3	20	2.7		1	0.1	-0.2	
Z	= 19200		0*			-16	-32	$z_j - b_j$

b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
512	y_5	20.8333		1	0.4167	-0.8333	0.0417	
720	y_1	7.4074	1		0.3704	0.0370	-0.0741	
Z	= 16000		0	0	0*	-16	-32	$z_j - b_j$

Visualizando este rango en el gráfico del problema directo, tendremos:



Variables que no están en la base

Si la variable cuyo análisis de coeficiente de funcional que se quiere analizar no está en la base, el límite c'_j que hace que haya justo un cambio de base (solución alternativa) debe ser tal que genere en el propio vector A_j un z_j-c_j igual a cero (cero alternativo).

Iı 16/94

		c_j	c'_j c_j	
C_k	x_k	B_k	A_j	b_i/a_{ij}
Z =			~~zj-cj~~	z_j-c_j
Z =			0*	z_j-c_j

$$(z_j - c_j) - (c'_j - c_j) = 0$$

1) para un problema de máximo, z_j-c_j es positivo; luego

   a) si se busca el límite superior la variación (c'_j-c_j) es positiva, luego será

$$\boxed{c_{j\,\text{sup}} = c_j + (z_j - c_j)} \quad \textbf{(5.3)}$$

   b) el límite inferior será -∞, ya que (c'_j - c_j) es negativo, por lo que la diferencia arriba indicada nunca podrá ser igual a cero.

$$\boxed{c_{j\,\text{inf}} = -\infty} \quad \textbf{(5.4)}$$

2) para un problema de mínimo, z_j-c_j es negativo; luego

   a) si se busca el límite inferior, la variación (c'_j-c_j) es negativa, luego será

$$\boxed{c_{j\,\text{inf}} = c_j - (z_j - c_j)} \quad \textbf{(5.5)}$$

   b) el límite superior será +∞, ya que (c'_j-c_j) es positivo, por lo que la diferencia arriba indicada nunca podrá ser igual a cero.

$$\boxed{c_{j\,\text{sup}} = +\infty} \quad \textbf{(5.6)}$$

Continuando con el ejemplo formulado, supongamos que se quiere determinar cuál es el rango de validez de la solución dual para el recurso Tratamiento Térmico (TT) dentro del cual no se alteran los valores de las variables duales (solución dual).

Partiendo de la tabla óptima dual, observamos que la variable correspondiente (y_1) no es básica. Luego, considerando que el problema dual de este ejemplo persigue un objetivo de minimización, aplicaremos las expresiones 5.5 y 5.6:

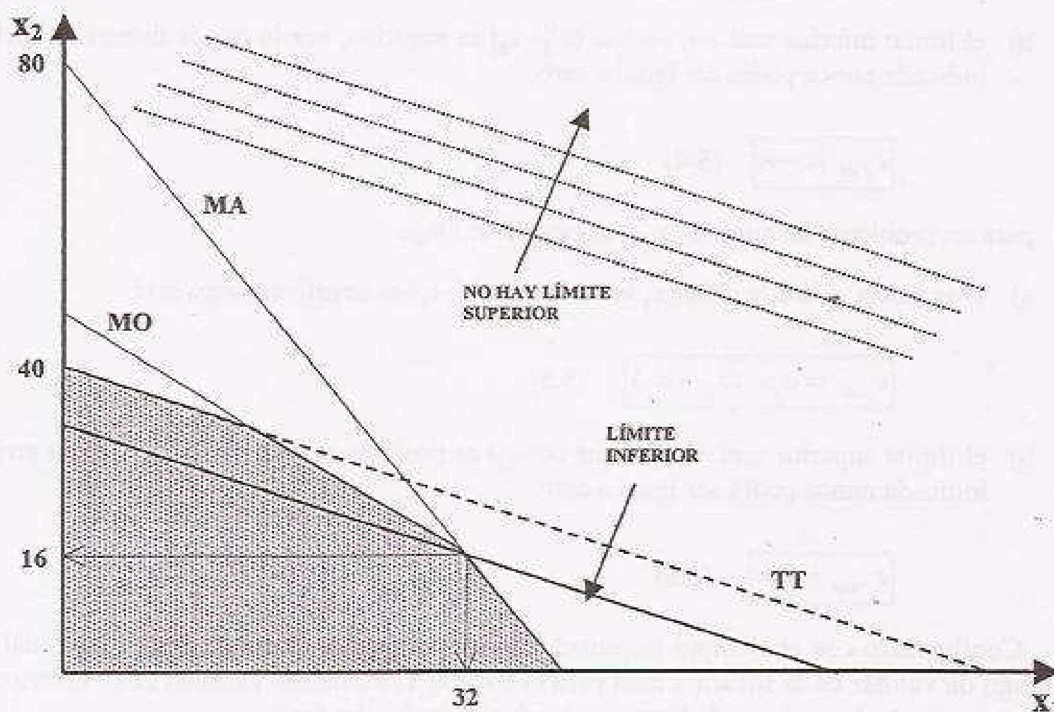
$$b_{1\,\text{inf}} = 720 - 144 = 576$$

$$b_{1\,\text{sup}} = +\infty$$

En efecto cuando b_1= 576 tendremos una solución alternativa.

		b_i	576 ~~720~~	640	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A´1	A´2	A´3	A´4	A´5	
640	y_2	12.5	-1.125	1		-0.125	0.125	
480	y_3	20	2.7		1	0.1	-0.2	
Z = 17600			~~-144~~			~~-32~~	~~-16~~	z_j-b_j
Z = 17600			0*			- 32	- 16	z_j-b_j
			⇑					

Gráficamente:



Recordemos que una solución alternativa en el dual es una solución degenerada en el directo.

5..4 ANÁLISIS PARAMÉTRICO

1. Variaciones paramétricas de coeficientes del funcional

Tomaremos una variación del coeficiente del producto A (c_1), haciéndolo variar desde -∞ hasta +∞, a partir de la solución óptima hallada. Empezaremos el análisis para valores superiores a 400:

En primer lugar se calcula el límite superior y se determina la base óptima para ese valor del parámetro.

$$c_{1\,sup} = 400 + \frac{20}{0.1} = 600$$

		c_j	600 ~~400~~	300	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	-
600 ~~400~~	x_1	32	1			0.125	-0.1	-
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	80
Z = ~~17600~~			0	0	0	~~12.5~~	~~20~~	z_j-c_j
Z = 24000			0	0	0	37.5	0*	z_j-c_j

Luego se procede a cambiar de base a la solución alternativa correspondiente:

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	360		13.5	1	-0.5625		
600 ~~400~~	x_1	40	1	0.5		0.0625		
0	x_5	80		5		-0.625	1	
Z = 24000			0	0*	0	37.5	0	z_j-c_j

y se calcula el nuevo límite superior.

Sin embargo, al aplicar (5.1), vemos que, tratándose de un problema de maximización, no encontramos ningún a_{ij} negativo. En consecuencia, no hay límite superior para c_1, lo que significa que se mantendrán los mismos valores de las variables directas para cualquier valor de c_1 mayor a 600.

Analizaremos ahora valores inferiores a los 400 correspondientes a la solución inicial. Aplicando (5.2) y teniendo en cuenta que los valores de a_{ij} tienen que ser ahora positivos:

$$c_{2\,\text{inf}} = 400 - \frac{12.5}{0.125} = 300$$

		c_j	300 ~~400~~	300	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_3	144			1	1.125	-2.7	128
300 ~~400~~	x_1	32	1			0.125	-0.1	256
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	-
Z = ~~17600~~			0	0	0	~~12.5~~	~~20~~	z_j-c_j
Z = 14400			0	0	0	0*	30	z_j-c_j

Luego se procede a cambiar de base a la solución alternativa correspondiente:

c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_4	128			0.8889	1	-2.4	
300	x_1	16	1		-0.1111		0.2	
300	x_2	32		1	0.1111		-0.1	
Z = 14400			0	0	0*	0	30	z_j-c_j

Se calcula entonces el nuevo límite inferior aplicando (5.2):

$$c_{2\inf} = 300 - \frac{30}{0.2} = 150$$

y se lleva el problema a esa nueva base

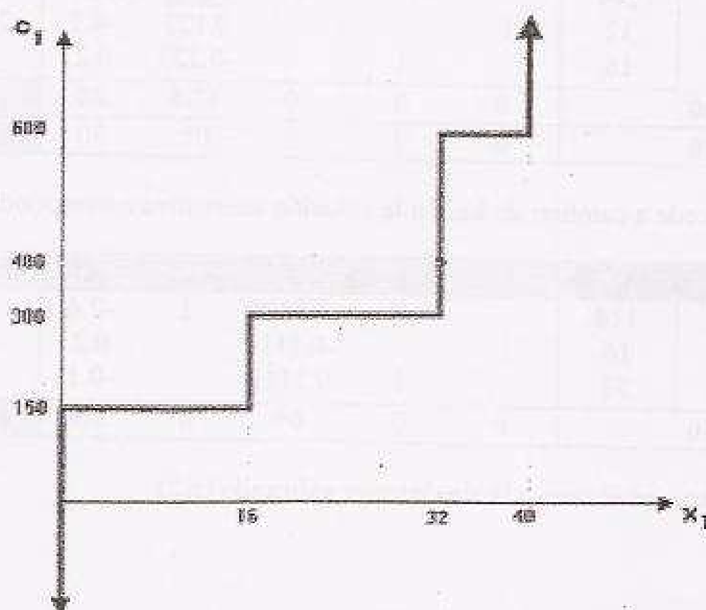
		c_j	150 ~~300~~	300	0	0	0	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_4	128			0.8889	1	-2.4	
150 ~~300~~	x_1	16	1		-0.1111		0.2	80
300	x_2	32		1	0.1111		-0.1	
Z = ~~14400~~			~~0~~	~~0~~	~~0*~~	~~0~~	~~30~~	z_j-c_j
Z = 12000			0	0	16.1667	0	0*	z_j-c_j

Se cambia ahora la base a la base alternativa correspondiente:

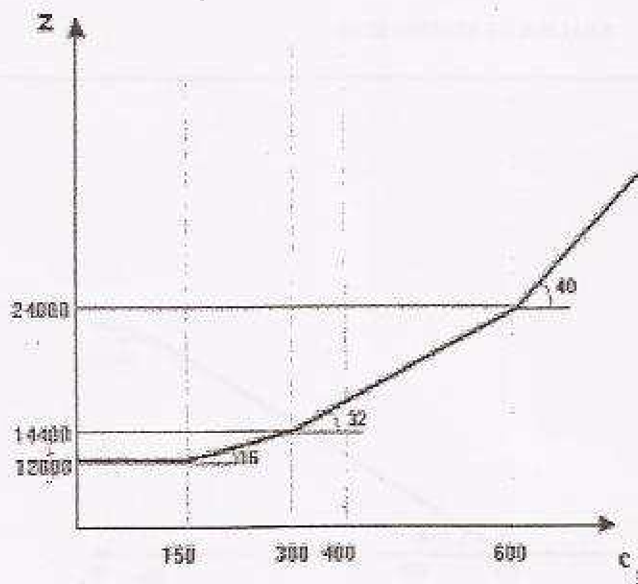
		c_j	150	300	0	0	0	
C_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	b_i/a_{ij}
0	x_4	320	12		-0.4444	1		
0	x_5	80	5		-0.5555		1	
300	x_2	40	0.5	1	0.0556			
Z = 12000			0*	0	16.6667	0	0	z_j-c_j

Debido a que x_1 se va de la base, se termina el análisis paramétrico.

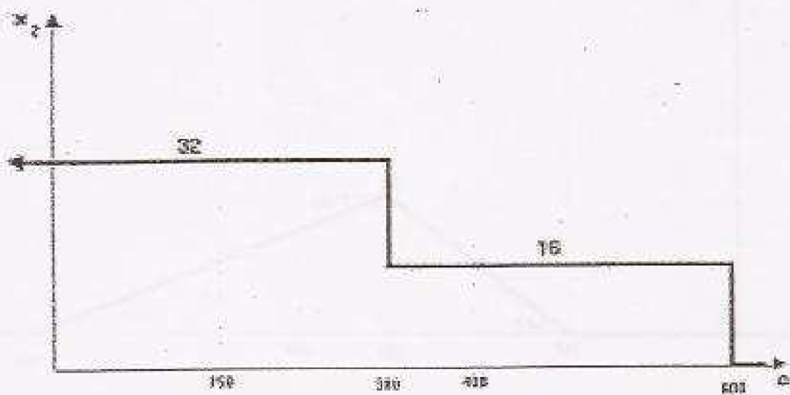
Graficando c_1 en función de x_1 se tiene lo que se denomina curva de oferta para el producto A:

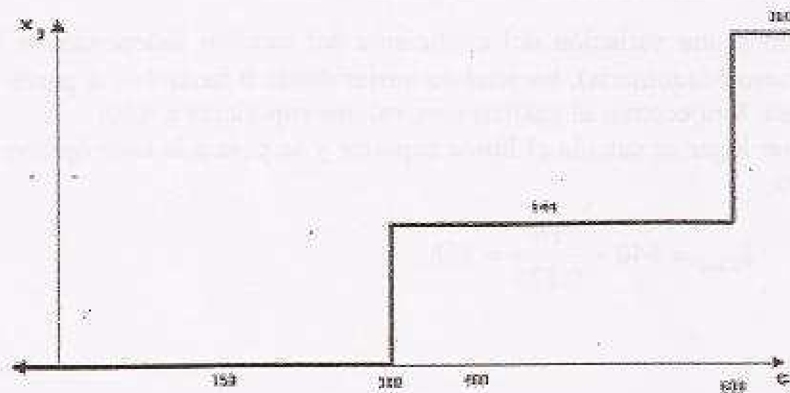


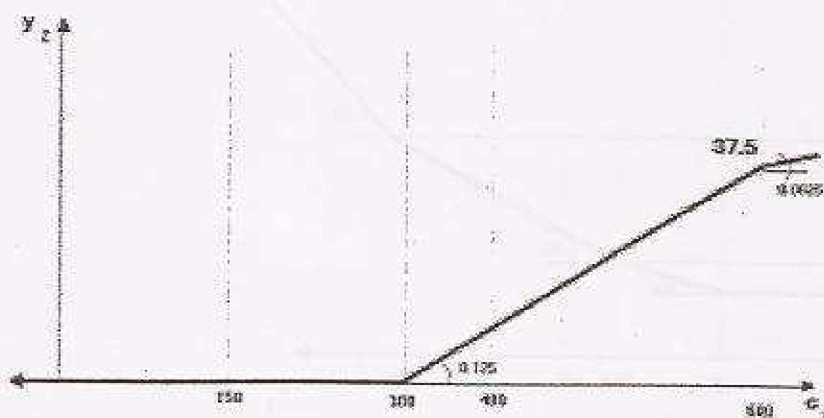
Se podría graficar adicionalmente la variación del funcional (z) en función de c_1:

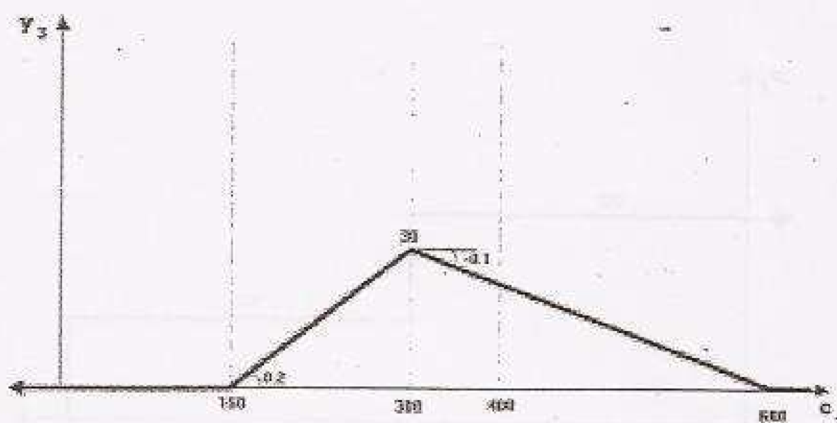


y también las variaciones de cualquier otro tipo de variable del problema, por ejemplo x_2 (fabricación de B), x_3 (sobrante de TT), y_2 (valor marginal de maquinaria) e y_3 (valor marginal de mano de obra).









2. Variaciones paramétricas de términos independientes

Tomaremos una variación del coeficiente del término independiente b_2 (correspondiente al recurso Maquinaria), haciéndolo variar desde 0 hasta $+\infty$, a partir de la solución óptima hallada. Empecemos el análisis para valores superiores a 640:

En primer lugar se calcula el límite superior y se pasa a la base óptima para ese valor del parámetro.

$$b_{2\,sup} = 640 + \frac{16}{0.125} = 768$$

		b_j	720	768 ~~640~~	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
768 ~~640~~	y_2	12.5	-1.125	1		-0.125	0.125	
480	y_3	20	2.7		1	0.1	-0.2	
Z = ~~17600~~			~~-144~~	0	0	~~-32~~	~~-16~~	z_j-b_j
Z = 19200			-288	0	0	-48	0*	z_j-b_j

Luego se introduce la variable y_5 a la base, saliendo y_2. La nueva base es entonces:

		b_j	720	768	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
0	y_5	100	-9	8		-1	1	
480	y_3	40	0.9	1.6	1	-0.1		
Z = 19200			-288	0*	0	-48	0	z_j-b_j

Se calcula entonces el nuevo límite superior de b_2. Como no es una variable básica, el nuevo límite superior es $+\infty$.

Se realizará ahora el análisis para valores inferiores a 640. El límite inferior es:

$$b_{2\,inf} = 640 - \left[\frac{32}{0.125}; \frac{144}{1.125}\right]_{min} = 512$$

		b_j	720	512 ~~640~~	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
512 ~~640~~	y_2	12.5	-1.125	1		-0.125	0.125	
480	y_3	20	2.7		1	0.1	-0.2	
Z = 16000			0*	0	0	-16	-32	z_j-b_j

Iterando, se pasa a la otra base alternativa:

		b_j	720	512	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
512	y_2	20.8333		1	0.4167	-0.0833	0.0417	
720	y_1	7.4074	1		0.3704	0.0370	-0.0741	
Z = 16000			0	0	0*	-16	-32	z_j-b_j

Se calcula ahora el nuevo límite inferior, y se itera después a la nueva solución:

$$b_{2\,inf} = 512 - \frac{16}{0.0833} = 320$$

		b_i	720	320 ~~512~~	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
320 ~~512~~	y_2	20.8333		1	0.4167	-0.0833	0.0417	
720	y_1	7.4074	1		0.3704	0.0370	0.0741	
Z = 12000			0	0	-80	0*	-40	z_j-b_j

Se itera para pasar a la base alternativa:

		b_i	720	320	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
320	y_2	37.50	2.25	1	1.25		-0.125	
0	y_4	200	27		10	1	-2	
Z = 12000			0*	0	-80	0	-40	z_j-b_j

El próximo límite inferior es:

$$b_{2\,\inf} = 320 - \frac{40}{0.125} = 0$$

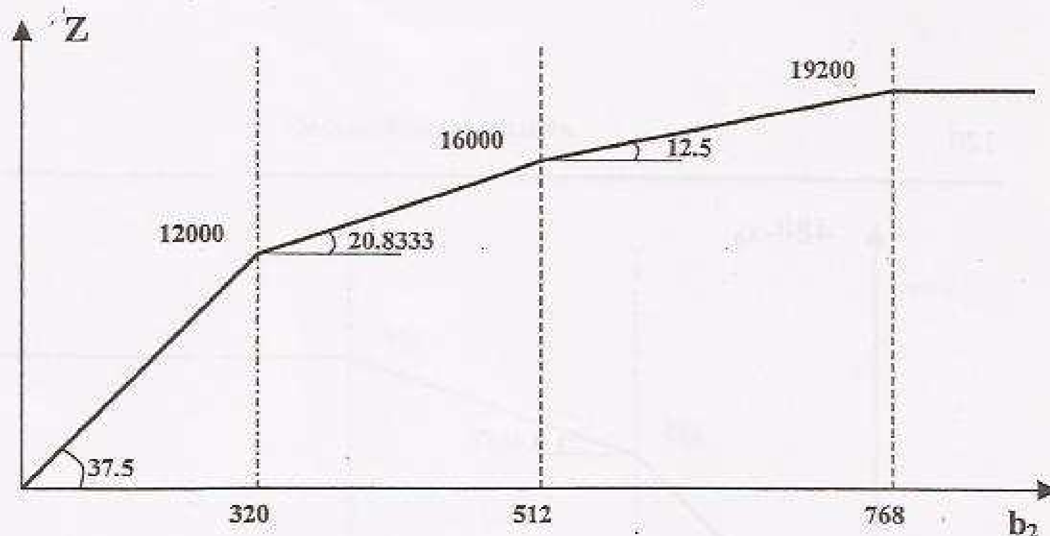
Por lo tanto, la nueva solución es:

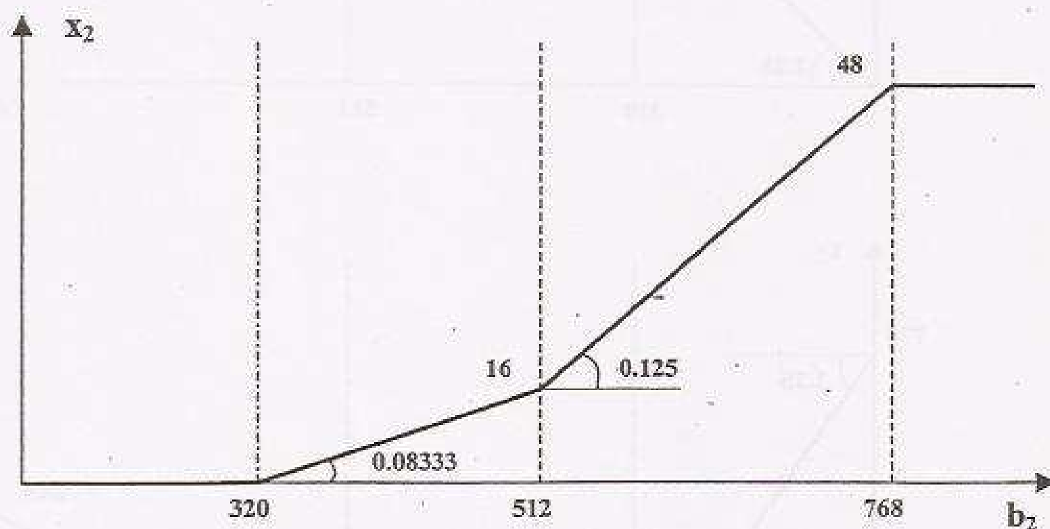
		b_i	720	0 ~~320~~	480	0	0	
b_k	y_k	C_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	
0 ~~320~~	y_2	37.50	2.25	1	1.25		-0.125	
0	y_4	200	27		10	1	-2	
Z = 0			-720	0	-480	0	0*	z_j-b_j
			x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	

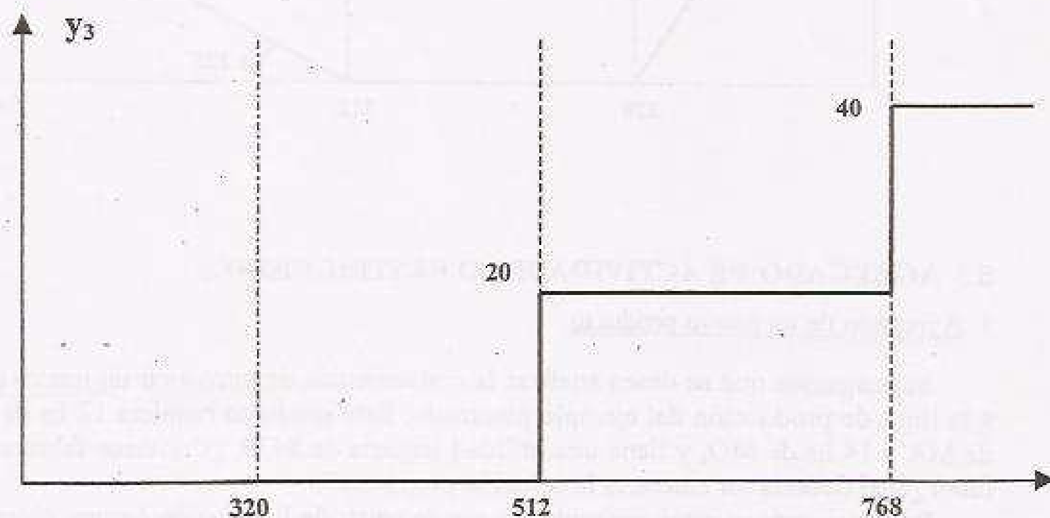
y ya no se puede seguir iterando debido a que al pretender ingresar y_2 no hay ninguna variable que pueda salir. Observar que este punto es el originen de coordenadas.

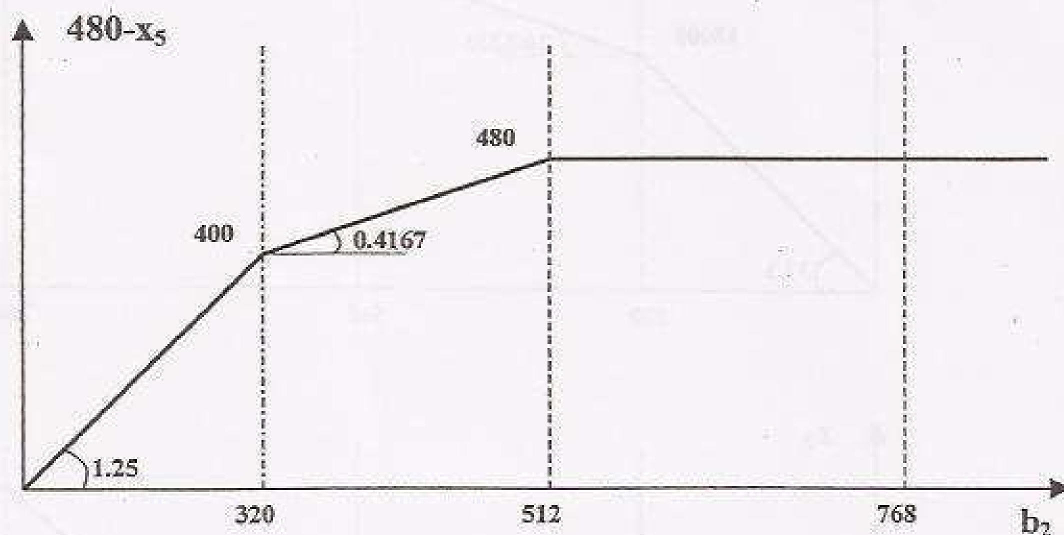
Veamos, entonces la evolución de algunas variables en forma gráfica, por ejemplo funcional (z), producción de B (x_2), valor marginal de la mano de obra (y_3), producción de A (x_1), utilización de la mano de obra (480-x_5) y sobrante de tratamiento térmico (x_3).

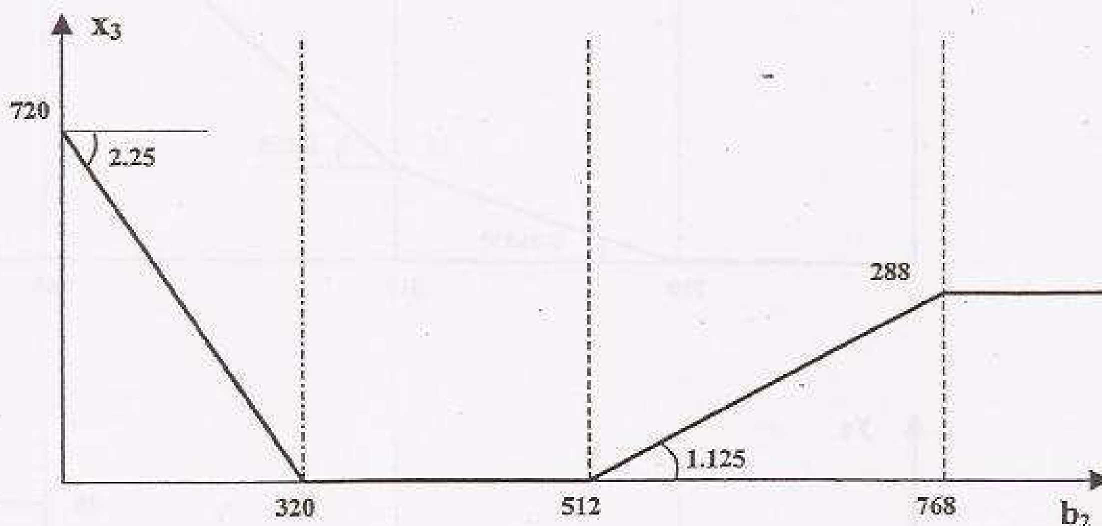
Los valores correspondientes a estas variables y las pendientes se obtienen, por supuesto, de las tablas calculadas.


Z
19200
16000
12.5
12000
20.8333
37.5
320
512
768
b_2


x_2
48
16
0.125
0.08333
320
512
768
b_2


y_3
40
20
320
512
768





5.5 AGREGADO DE ACTIVIDADES O RESTRICCIONES

1. Agregado de un nuevo producto

Supongamos que se desea analizar la conveniencia de introducir un nuevo producto C a la línea de producción del ejemplo planteado. Este producto requiere 12 hs de TT, 11 hs de MA y 14 hs de MO, y tiene una utilidad unitaria de $430. ¿Conviene fabricarlo?. Si así fuera ¿cuál debería ser entonces la solución propuesta?.

Para responder a estas preguntas se puede partir de la solución óptima obtenida. En el primer caso, la respuesta estará dada a partir de los valores que significan para el fabricante los recursos TT, MA y MO (valores duales marginales). Si el precio al que se podrían vender los recursos que insume la fabricación de una pieza cualquiera (z_j) fuera mayor a la utilidad unitaria que se obtendría por fabricarla (c_j), no conviene fabricarlo. En caso contrario, debería introducirse este producto a la línea de producción.

Llamando x_6 a la cantidad de piezas a fabricar por mes del producto C, para que convenga elaborarlo se debe cumplir que $z_6 \leq c_6$, es decir:

$$y_1 \,.\, a_{16} + y_2 \,.\, a_{26} + y_3 \,.\, a_{36} < c_6$$

Para nuestro ejemplo, tenemos que:

$$12\, y_1 + 11\, y_2 + 14\, y_3 = 12 \,.\, 0 + 11 \,.\, 12.5 + 14 \,.\, 20 = 417.5$$

que es menor que 430 \$/unidad. Es decir hay una diferencia de \$12.5 por cada unidad que se produzca. En consecuencia, conviene fabricar C.

A esta misma conclusión se podría haber arribado a partir de la tabla óptima directa, si se calculara el z_6-c_6.

Para hallar rápidamente el vector A_6 transformado, correspondiente a la última tabla, se debe multiplicar la matriz inversa de la última tabla por el vector A_6 inicial.

Como se ha explicado anteriormente, la matriz inversa de un paso cualquiera del *Simplex* es la matriz que está ubicada por debajo de la matriz unidad del primer paso.

PRIMERA TABLA

		c_j	400	300	0	0	0	430	
c_k	x_k	B_k	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
0	x_3	720	9	18	1			12	
0	x_4	640	16	8		1		11	
0	x_5	480	10	10			1	14	
Z = 0			− 400	-300	0		0	0	z_j-c_j

ÚLTIMA TABLA

0	x_3	144			1	1.125	-2.7		
400	x_1	32	1			0.125	-0.1		
300	x_2	16		1		-0.125	0.2		
Z = 17600			0	0	0	12.5	20		z_j-c_j

En nuestro ejemplo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1.125 & -2.7 \\ & 0.125 & -0.1 \\ & -0.125 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando la matriz A^{-1} por el vector de coeficientes tecnológicos correspondiente al producto C, se obtiene el transformado de dicho vector correspondiente a la última tabla.

$$A^{-1} . A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1.125 & -2.7 \\ & 0.125 & -0.1 \\ & -0.125 & 0.2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.425 \\ -0.025 \\ 1.425 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en la última tabla y calculando z_6-c_6:

ÚLTIMA TABLA

0	x_3	144			1	1.125	-2.7	-13.425	
400	x_1	32	1			0.125	-0.1	-0.0250	
300	x_2	16		1		-0.125	0.2	1.4250	
Z = 17600			0	0	0	12.5	20	-12.5	z_j-c_j

El z_6-c_6 es negativo, lo que indica que la función objetivo puede mejorar si se introduce la variable x_6 en la base (es decir producir C). Procediendo entonces, vemos que sale la variable x_2 (se deja de fabricar B), quedando la tabla óptima de la siguiente forma:

0	x_3	294.7368		9.4211	1	-0.0526	-0.8158		
400	x_1	32.2807	1	0.0175		0.1228	-0.0965		
430	x_6	11.2281		0.7018		-0.0877	0.1404	1	
Z = 17740.35			0	8.7719	0	11.4035	21.7544	0	z_j-c_j

Es decir, se deberán producir mensualmente 32.28 piezas A y 11.23 piezas C para obtener una utilidad de $17740.35.

De esta forma habrá un sobrante de TT igual a 294.74 hs por mes, no habrá sobrante MA (valor marginal $11.40) y no habrá sobrante de MO (valor marginal $21.75).

Por su parte, no conviene producir B (costo de oportunidad $8.77).

2. Agregado de una nueva restricción

Otro análisis marginal surge cuando se quiere estudiar el impacto que se produce por agregar al proceso una nueva restricción.

Supongamos que al ejemplo formulado originalmente (con las piezas A y B solamente) se le debe agregar una limitación de materia prima. ¿Qué pasaría si cada unidad de A requiriera 0,5 Kg, cada unidad de B insume 0,8 Kg y se dispusiera mensualmente de 25 Kg?.

Para responder a estas preguntas se puede partir de los valores óptimos directos obtenidos, observando si la nueva restricción es o no limitativa con respecto a la solución óptima encontrada.

$$0.5 \cdot x_1 + 0.8 \cdot x_2 = 0.5 \cdot 32 + 0.8 \cdot 16 = 28.80 \text{ Kg}$$

Como se dispone de solamente 25 Kg por mes, la solución óptima se va a ver modificada (hay una diferencia de 3.8 Kg). A esta misma conclusión se podría haber arribado a partir de la última tabla del problema dual. Llamando y_6 a la variable dual correspondiente a la restricción de materia prima, la formulación dual del problema es:

MIN: $720\ y_1 + 640\ y_2 + 480\ y_3 + 25\ y_6$

Sujeto a: A) $9\ y_1 + 16\ y_2 + 10\ y_3 + 0.5\ y_6 \geq 400$

B) $18\ y_1 + 8\ y_2 + 10\ y_3 + 0.8\ y_6 \geq 300$

siendo $x_i \geq 0$

A la primera tabla dual se le debe agregar el vector A'_6:

PRIMERA TABLA

		c_j	720	640	480	0	0	M	M	25	
c_k	y_k	B_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	μ_1	μ_2	A'_6	b_i/a_{ij}
M	μ_1	400	9	16	10	-1		1		0.5	
M	μ_2	300	18	8	10		-1		1	0.8	

Para calcular directamente el transformado de A'_6 en la tabla óptima, se toma la matriz inversa y se multiplica por el vector original.

$$A^{-1}.A_6 = \begin{pmatrix} 0.125 & -0.125 \\ -0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0375 \\ 0.11 \end{pmatrix}$$

Luego, la última tabla del dual completa será:

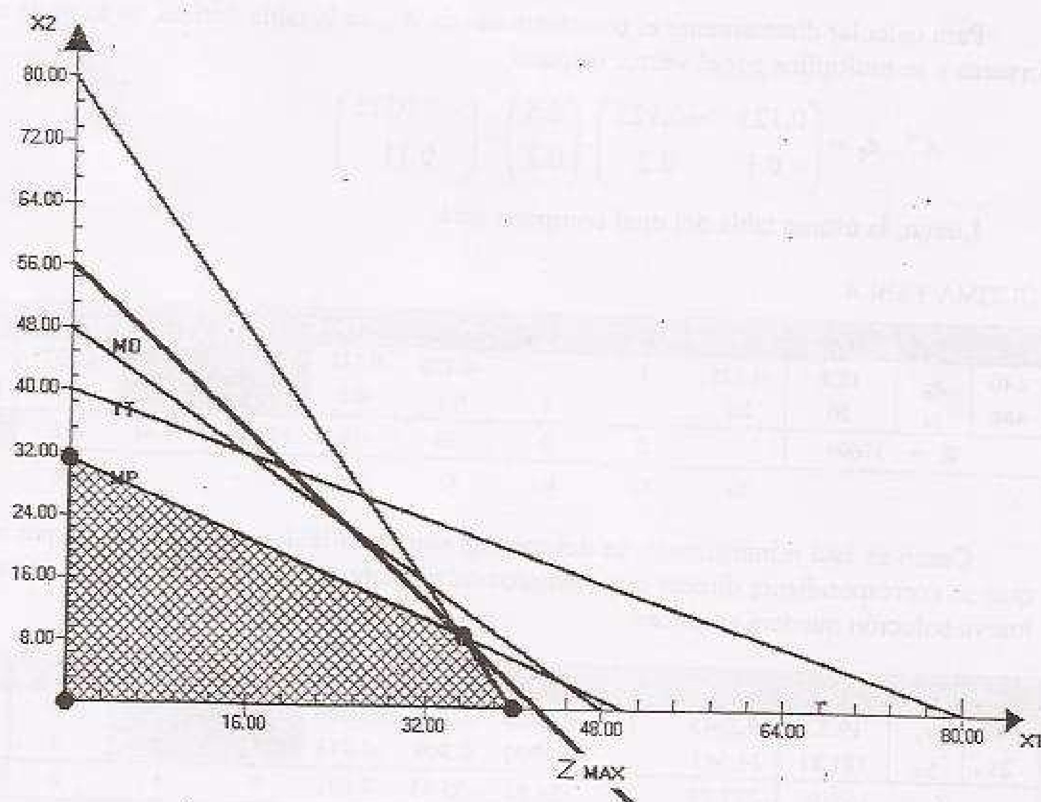
ÚLTIMA TABLA

c_k	y_k	B_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	μ_1	μ_2	A'_6	b_i/a_{ij}
640	y_2	12.5	-1.125	1		-0.125	0.125	0.125	-0.125	-0.0375	
480	y_3	20	2.7		1	0.1	-0.2	-0.1	0.2	0.11	181.81
	Z =	17600		0	0	-32	-16	+32-M	+16-M	3.8	z_j-c_j
			x_3	x_4	x_5	x_1	x_2			x_6	

Como se está minimizando, se deberá ingresar la variable y_6 en la base, lo que implica que su correspondiente directa que llamaremos x_6 (sobrante de Materia Prima) es cero. La nueva solución quedará entonces:

c_k	y_k	B_k	A'_1	A'_2	A'_3	A'_4	A'_5	μ_1	μ_2	A'_6	b_i/a_{ij}
640	y_2	19.32	-0.2045	1	0.3409	-0.091	0.0568	*	*		
25	y_6	181.81	24.545		9.0909	0.909	-1.818	*	*	1	181.81
	Z =	16910	-237.27	0	-34.55	-35.45	-9.091	*	*	0	z_j-c_j
			x_3	x_4	x_5	x_1	x_2			x_6	

Esto significa que la nueva solución será producir 35.45 unidades de A y 9.09 unidades de B por mes, para obtener una utilidad de $ 16910. De esta forma el sobrante de TT es de 237.27 hs por mes, no hay sobrante de MA (valor marginal $19.32 por hora), el sobrante de MO es de 34.55 y no hay sobrante de MP (valor marginal $181.81 por Kg).


X2
80.00
72.00
64.00
56.00
48.00
40.00
32.00
24.00
16.00
8.00
MD
TT
MP
16.00
32.00
48.00
64.00
80.00
X1
Z MAX

CAPÍTULO 6

FORMULACIÓN DE PROGRAMAS MATEMÁTICOS

6.1 CONSIDERACIONES PREVIAS Y UTILIZACIÓN DE SISTEMAS COMPUTARIZADOS DE PL

En los modelos matemáticos, los nombres de las variables deben ser mnemotécnicos a fin de poder identificarlas rápidamente durante el proceso de modelización o el análisis de los resultados. La mayoría de los sistemas de PM admiten nombres de variables de hasta 8 caracteres alfanuméricos, con la única condición de que el primer dígito sea alfabético.

Los sistemas de PM permiten el ingreso de restricciones de "mayor e igual" y de "menor e igual". Es decir, no es necesario agregar variables *slacks* para transformar las inecuaciones en ecuaciones ya que el propio programa las generará internamente. A fin de facilitar el análisis previo y posterior a la resolución, resulta conveniente también identificar a cada restricción con un nombre. Cabe mencionar que el nombre que el programa adopta para la variable slack es el mismo que se le ha dado a la restricción. Si no se consigna un nombre, típicamente los sistemas asignan un número a las restricciones. Para la selección de los nombres de las restricciones se aplican las mismas consideraciones que para el de las variables.

El sistema LINDO (*Linear Interactive and Discret Optimizer*) es uno de los pocos programas de PL al que se le ingresan los datos en la forma natural con que se escriben las restricciones, a diferencia de la mayoría que requiere el ingreso en forma matricial. Esto representa una ventaja para la formulación de problemas relativamente simples, pero no resulta útil cuando el problema tiene una gran cantidad de variables y restricciones. Los modelos deben comenzar indicando si la función objetivo se debe maximizar (MAX) o minimizar (MIN) seguida con la expresión cuantitativa del funcional. Luego se ingresa el texto ST (o SUBJECT TO, que significa "sujeto a") seguido por las restricciones. Las restricciones de mayor o igual se escriben simplemente con el signo > y las de menor o igual con el signo < (o también >= y <= respectivamente). No es necesario separar los coeficientes de las variables con un espacio (aunque se puede hacer para mayor claridad) ni se deben consignar los signos de multiplicación (tales como "*", "x" o "."). Si se dan nombres a las restricciones, se los debe cerrar con un paréntesis. Al finalizar el modelo, se debe indicar el comando END. Si no se establece condición alguna para las variables, el sistema adopta variables continuas y no negativas.

El problema del ejemplo de Tratamiento Térmico, Maquinaria y Mano de Obra se ingresa en el sistema LINDO de la siguiente forma:

```
MAX  Z) 400 A + 300 B
ST
TT)    9 A + 18 B < 720
MA) 16 A +   8 B < 640
MO) 10 A + 10 B < 480
END
```

Hemos dado al funcional el nombre de Z; a la restricción de Tratamiento Térmico, TT; a la restricción de Maquinaria, MA; y a la de Mano de Obra, MO. Tal como se mencionó, si no se consignan nombres para las ecuaciones, el sistema las denominará 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Los nombres indicados para las variables, siguiendo la recomendación precitada, han sido A y B (aunque por supuesto se pudo haber puesto X1 y X2).

Ejecutando el comando SOLVE se obtiene la solución del problema tal como se indica a continuación:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP    2

    OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    Z)    17600.00

 VARIABLE        VALUE       REDUCED COST
    A          32.000000       0.000000
    B          16.000000       0.000000

   ROW          SLACK       DUAL PRICES

   TT)        144.000000       0.000000
   MA)          0.000000      12.500000
   MO)          0.000000      20.000000

NO. ITERATIONS=     2
```

El informe indica que la solución óptima se encontró en el paso 2. A continuación se observa el valor de la función objetivo, en este caso 17600.

Posteriormente, se muestra el resultado del problema en dos secciones. La primera sección se refiere a las variables reales (actividades) del problema. En la columna VALUE se indica el nivel alcanzado por las actividades en la solución óptima, mientras que la columna REDUCED COST indica el costo de oportunidad de cada una de ellas.

La segunda sección se refiere a las variables flojas, es decir a las relacionadas con las restricciones (llamadas ROWS –es decir filas– por el sistema). En la columna SLACK OR SURPLUS se indica el valor adoptado por la variables slack en la solución óptima, mientras que la columna DUAL PRICES muestra el valor marginal. Obsérvese que el sistema ha adoptado como nombres de las variables *slacks* a los dados para las restricciones.

Finalmente, se indica la cantidad de iteraciones efectuadas para llegar a la solución óptima.

Antes de mostrar el resultado, el sistema consulta si se quiere efectuar un análisis de sensibilidad. Si se responde en forma positiva, luego de la solución arriba indicada, el reporte se continúa con los rangos de validez de los coeficientes del funcional y de los términos independientes dentro de los cuales se mantiene la solución indicada. El informe para el problema ejemplo es el siguiente:

```
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                     OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE       CURRENT        ALLOWABLE        ALLOWABLE
                COEF          INCREASE         DECREASE
   A         400.000000      200.000000       100.000000
   B         300.000000      100.000000       100.000000
```

RIGHT HAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
TT	720.000000	INFINITY	144.000000
MA	640.000000	128.000000	128.000000
MO	480.000000	53.333332	80.000000

Cuando la solución de un problema no es finita (poliedro abierto), el sistema lo indica con el mensaje "UNBOUNDED SOLUTION", mientras que las soluciones incompatibles dan el siguiente mensaje: "NO FEASIBLE SOLUTION". En el caso de soluciones alternativas, el programa LINDO muestra solamente la primera solución alternativa alcanzada, y no hace ninguna referencia al hecho de haber alcanzado esta situación particular. Tampoco se informa cuando la solución óptima es un punto de degeneración.

El sistema permite ver también la tabla final del *Simplex*. Sin embargo, el informe de esta opción resulta engorroso de interpretar cuando se trata de un modelo con muchas variables, por lo que no es recomendable. A diferencia de la tabla tal como la hemos expuesto en los capítulos anteriores, el LINDO muestra la columna de resultados (B_k) en el extremo derecho, mientras que la primera fila es la correspondiente a Z y $z_j - c_j$.

THE TABLEAU

ROW (BASIS)	A	B	SLK 2	SLK 3	SLK 4	
1 ART	0.000	0.000	0.000	12.500	20.000	17600.000
TT SLK 2	0.000	0.000	1.000	1.125	-2.700	144.000
A	1.000	0.000	0.000	0.125	-0.100	32.000
B	0.000	1.000	0.000	-0.125	0.200	16.000

Existen otros sistemas en el mercado específicos de programación lineal tales como: AXA, C-WHIZ, CPLEX, Fort LP, HS/LP, LAMPS, LOQO, LP/MIP, LSSOL, MILP LP, MINOS, MPL, MathPRO, OMNI LP, OMP, ROSYS, OSL, PC-PROG, ROI XPRESS, SCICONIC, SOPT, VMP/PC, XL SOL y X-PRESS-MP. Casi todos ellos disponen de optimizadores lineales y enteros. Para la resolución de problemas de programación lineal también hay sistemas de planilla de cálculo como el SOLVER de Excel y el WHAT'S BEST! y sistemas de enseñanza de técnicas de Investigación Operativa e Ingeniería Industrial (entre los que se pueden mencionar el WinQSB y el STORM). Algunos *software* disponen de herramientas de programación matemática general (incluyendo programación no lineal) tales como el Fort MP, LINGO, GINO, etcétera.

La mayoría de los sistemas de PM, a diferencia del LINDO, requieren que el ingreso de los datos se efectúe en forma de cuadro matricial. Esta forma de exponer el problema es mucho más sencilla para modelizar, y por lo tanto recomendable, cuando se deben describir modelos matemáticos complejos. Los sistemas MPS, WinQSB, OMNI LP de HAVERLY, OSL, entre muchos otros, utilizan esta forma de ingreso de datos.

Para el ejemplo que hemos tomado como base para nuestro estudio, la forma extendida, o cuadro matricial, correspondiente es la siguiente:

	A	B		RHS
TT	9	18	≤	720
MA	16	8	≤	640
MO	10	10	≤	480
MAX	400	300		
VAR	C, NN	C, NN		

En la última fila se ha indicado la naturaleza de las variables del problema (C: continua, NN: no negativa).

Los sistemas de PL avanzados vienen con programas generadores de matrices para facilitar la modelización de problemas muy complejos. HAVERLY y EMPS han sido los pioneros en la provisión de programas generadores de matrices y generadores de informes.

6.2 UTILIZACIÓN DE VARIABLES GENERADAS

En muchas ocasiones, resulta muy práctico generar variables que no son estrictamente necesarias para resolver el problema, pero sí para facilitar la modelización e interpretación de los resultados. Tal es el caso de variables totalizadoras, actividades recurso-actividad o requerimiento-actividad, etcétera, que llamaremos "variables generadas".

Ejemplo 6.1:

Formular el modelo matemático del Ejemplo 1.1 si se hubieran dado como datos los siguientes precios de venta de los productos y costos unitarios de cada uno de los recursos, en lugar de las contribuciones marginales ($400 y $300):

Precio de venta unitario de A: $ 610
Precio de venta unitario de B: $ 560
Costo de la hora de TT: $10
Costo de la hora de MA: $5
Costo de la hora de MO: $4

Resolución:

En este caso, se podría haber calculado previamente la contribución marginal y formular el problema tal como lo hemos hecho. Sin embargo, este procedimiento no sería conveniente, dado que si se verificara un cambio en alguno de los parámetros de los costos nos obligaría a recalcularlos para la correspondiente actividad. La forma correcta de formular el modelo, si la información estuviera desagregada como se indica, es incluyendo las siguientes variables generadas (recurso-actividad):

TT: Utilización del recurso Tratamiento Térmico (hs/mes).
MA: Utilización mensual del recurso Maquinaria (hs/mes).
MO: Utilización mensual del recurso Mano de Obra (hs/mes).

De esta forma, se puede afectar el costo de cada recurso en la variable correspondiente en el funcional y el precio de venta en cada uno de los productos. Llamando a las restricciones U** a las correspondientes a la utilización del recurso y D** a las correspondientes a la disponibilidad máxima de cada uno de ellos, el modelo matemático quedaría formulado de la siguiente manera:

	A	B	TT	MA	MO		RHS
UTT	9	18	– 1			=	0
UMA	16	8		– 1		=	0
UMO	10	10			– 1	=	0
DTT			1			≤	720
DMA				1		≤	640
DMO					1	≤	480
MAX	610	560	–10	– 5	– 4		
VAR	C,NN	C,NN	C,NN	C,NN	C,NN		

Los totalizadores también son muy útiles cuando se trata de modelizar situaciones complejas. Supongamos el siguiente problema de distribución:

Ejemplo 6.2:

Una empresa tiene 4 fábricas y 5 depósitos. Los costos de fabricación y transporte por unidad de producto, capacidad de elaboración de las fábricas y requerimientos mínimos de cada uno de los depósitos se indican en la siguiente tabla:

FABRICAS	Costo de Fabricac. ($/un)	DEPÓSITOS COMERCIALES 1	2	3	4	5	Capacidad (un)
		(Costos de transporte en $/un)					
A	120	10	9	8	11	7	300
B	200	6	5	7	9	9	500
C	140	12	6	12	10	8	400
D	150	8	9	6	6	5	500
Req. Min. (un)		450	350	300	200	350	

Formular un modelo matemático que permita minimizar los costos.

Resolución:

Llamaremos "ij" a la cantidad de unidades a transportar de la fábrica i al depósito j.

A los fines de formular los costos adecuadamente, generaremos variables totalizadoras Fi.

	FA	FB	FC	FD	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	C1	C2	C3	C4	C5	D1	D2	D3	D4	D5		
FA	-1				1	1	1	1	1																=	0
FB		-1								1	1	1	1	1											=	0
FC			-1												1	1	1	1	1						=	0
FD				-1																1	1	1	1	1	=	0
CA	1																								≤	300
CB		1																							≤	500
CC			1																						≤	400
CD				1																					≤	500
R1					1					1					1					1					≥	450
R2						1					1					1					1				≥	350
R3							1					1					1					1			≥	300
R4								1					1					1					1		≥	200
R5									1					1					1					1	≥	350
MIN	120	200	140	150	10	9	8	11	7	6	5	7	9	9	12	6	12	10	8	8	9	6	6	5		
VAR todas no negativas y continuas																										

6.3 EJEMPLOS DE FORMULACIÓN DE RESTRICCIONES LINEALES

Recurso de fabricación compartido

Supongamos un recurso de fabricación (máquina, planta, instalación, etc.) utilizado por varios productos (A, B y C, por ejemplo). Plantearemos a continuación varias proposiciones restrictivas y para cada una de ellas formularemos la formulación matemática correspondiente:

1. *La máquina tiene capacidad para producir 100 piezas por día:*

$$A + B + C \leq 100$$

2. *La máquina tiene capacidad para producir 50 piezas de A u 80 piezas de B o 100 unidades de C (o combinaciones lineales entre estos valores):*

$$\frac{A}{50} + \frac{B}{80} + \frac{C}{100} \leq 1$$

En términos de PL, esta inecuación se debe formular, por supuesto, de la siguiente forma:

$$0.02\ A + 0.0125\ B + 0.01\ C \leq 1$$

3. *La máquina está disponible 24 hs por día. La fabricación de las piezas A se hace a razón de 10 unidades por hora, la de las B a 20 unidades por hora y la de las C a 5 unidades por hora:*

$$\frac{A}{10} + \frac{B}{20} + \frac{C}{5} \leq 24$$

Nuevamente, esta ecuación debe formularse con los coeficientes tecnológicos multiplicando a las variables, de la siguiente forma:

$$0,1\ A + 0.05\ B + 0.2\ C \leq 24$$

La proposición también se podría haber expresado de la siguiente forma: *La máquina está disponible 24 hs por día. Cada pieza A requiere 0.1 h, cada pieza B insume 0,05 y cada pieza C requiere 0,2 hs.*

Mezcla de productos

Supongamos un producto P que se elabora mezclando tres componentes W, X e Y. Esto es, la cantidad P es el resultado exacto de la combinación de los tres componentes, por lo que la expresión matemática es:

$$- P + W + X + Y = 0$$

1. *La cantidad de W debe ser superior al doble de la de Y:*

$$W - 2\ Y \geq 0$$

2. *El producto P debe ser superior a 100 litros, no debe llevar más de un 30% de X ni menos de un 20% de Y:*

$$P \geq 100$$

$$X - 0.3\ P \leq 0$$

$$Y - 0.2\ P \geq 0$$

3. *El componente W tiene un contenido de 6 unidades de fibra, el X de 4 unidades y el Y de 10. El producto P requiere un contenido mínimo de 7 unidades de fibra:*

$$6\ W + 4\ X + 10\ Y - 7\ P \geq 0$$

Estructura de producto manufacturado

Un producto P se arma con 3 componentes de R, 2 componentes de S y 4 de T. Se requieren 100 unidades de P como mínimo.

$$R - 3P = 0$$

$$S - 2P = 0$$

$$T - 4P = 0$$

$$P \geq 100$$

Desagregado de un producto en varios

Supongamos una planta en donde se procesan A y B para obtener J, K y L.

1. *Por cada unidad de A se obtiene un 50% de J, un 30 % de K y el resto en L. Por cada unidad de B se obtiene un 40% de J, un 50% de K y un 10% en L.*

$$J - 0.5A - 0.4B = 0$$

$$K - 0.3A - 0.5B = 0$$

$$L - 0.2A - 0.1B = 0$$

2. *La planta, que funciona 30 días por mes, tiene una capacidad de alimentación de 1000 unidades por mes. Además tiene una capacidad de extracción de 15 unidades de J por día.*

$$\frac{A}{450} + \frac{B}{400} \leq 1$$

La explicación de esta restricción, que deberá expresarse como

$$0.00222A + 0.0025B \leq 1$$

es la siguiente:

Si se procesara A solamente, el rendimiento en J sería 1000 . 0.5 = 500 unidades, pero como se pueden extraer como máximo 15 . 30 = 450 unidades, la restricción estará dada por esta última condición.

Por su parte si se procesara B solamente, el rendimiento en J sería 1000 . 0.4 = 400 unidades, que es menor que la limitación de 450 unidades por la extracción. En consecuencia, es más limitativa la condición de alimentación que la de extracción.

Programación "multi-time"

Muchos programas matemáticos requieren vincular variables que corresponden a diferentes períodos de tiempos. Un ejemplo clásico de formulación de modelos de etapas múltiples es el correspondiente a la programación de la producción, con las variables de producción y ventas vinculadas a través de los inventarios. Para un producto determinado que tiene un ingreso a almacén (generado, por ejemplo, por una actividad de producción) y un egreso de almacén (generado por una actividad de venta), y llamando:

S_i: stock final en el período i,

P_i: producción del período i, y

V_i: venta del producto en el período i,

la relación que vincula estas variables para cada período es la siguiente:

$$S_i - S_{i-1} - P_i + V_i = 0$$

Reciclado de productos

Supongamos el siguiente caso: *Una cantidad semanal x_1 de un producto A y otra cantidad x_2 de un producto B, provenientes de una etapa de elaboración previa, deben procesarse en un equipo que tiene una disponibilidad máxima de 60 hs por semana. Cada pieza de A insume 2 hs y cada pieza de B requiere 1.5 hs. En una etapa posterior (por ejemplo como consecuencia de control de calidad), se determina que un 10% de las piezas A y un 20% de las B deben reprocesarse en el equipo.*

La formulación matemática de la restricción es:

$$\frac{2}{0.9}x_1 + \frac{1.50}{0.8}x_2 \leq 60$$

En efecto, la cantidad de piezas A que se procesan en la máquina (x'_1) por semana es igual a las x_1 piezas que provienen de la etapa anterior más el 10% de las x'_1 provenientes de la etapa posterior.

Es decir: $x_1 + 0.1\, x'_1 = x'_1$

Despejando x'_1, se tiene que: $x'_1 = \dfrac{x_1}{0.9}$.

El mismo análisis se hace para x_2 y, por supuesto, la restricción se debe formular en el formato de PL, es decir:

$$2.2222\, x_1 + 1.8750\, x_2 \leq 60$$

Costo diferencial de un excedente

A menudo una variable x_i está afectada por una contribución a la función objetivo c_i hasta un límite determinado, pero por una contribución diferente c'_i si se excede dicho límite. Supongamos que *el costo de la mano de obra es de 5 \$ por hora normal y de 8 \$ por hora extra. Cada pieza A requiere 3 hs de mano de obra y cada pieza B insume 4 hs. La disponibilidad normal de mano de obra es de 20 hs pero se pueden tomar hasta 4 hs extras por día.* Llamando HN a las horas normales utilizadas por día, y HE a las horas extras diarias, las restricciones serán:

$$3\,A + 4\,B - HN - HE = 0$$

$$HN \leq 20$$

$$HE \leq 4$$

Si el funcional es de mínimo, la variable HN deberá estar afectada por 5 y la variable HE por 8:

MIN: ...... + 5 HN + 8 HE + ...

6.4 VARIABLES NEGATIVAS

El algoritmo *Simplex* requiere la condición de no negatividad de las variables ya que el criterio de búsqueda de una nueva solución se basa en la expresión 2.4:

$$Z^{(P+1)} = Z^{(P)} - \theta\,(z_j - c_j)$$

Esto es así porque el funcional del próximo paso P puede mejorar sólo si z_j-c_j es negativo en el caso de estar maximizando (o positivo si se está minimizando) y si el valor de la variable que está ingresando en el próximo paso (θ) es positiva.

Para resolver un problema de PL en donde alguna de sus variables pueda asumir valores negativos habrá que hacer los siguientes cambios de variables.

<u>Variables con cota mínima menor a cero</u>

Si una variable puede asumir valores negativos, pero acotado a un límite inferior (-a), es decir

$$x_j \geq -a$$

Esta inecuación es equivalente a:

$$x_j - x'_j = -a \quad \therefore \quad x_j = x'_j - a$$

en donde x'_j es no negativa. Consecuentemente, se reemplaza el valor de x_j en la formulación, quedando un sistema de PL convencional con todas las variables no negativas.

<u>Ejemplo 6.3:</u>

MAX:	$-3x_1 + 6x_2 - 4x_3$
Sujeto a:	$4x_1 - x_2 - x_3 \geq 100$
	$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 100$
	$6x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 150$
siendo:	x_1, x_2 no negativas
y:	$x_3 \geq -15$

Para resolver, se reemplaza en el programa: $x_3 = x'_3 - 15$

MAX:	$-3x_1 + 6x_2 - 4(x'_3 - 15)$
Sujeto a:	$4x_1 - x_2 - (x'_3 - 15) \geq 100$
	$2x_1 + 3x_2 - 2(x'_3 - 15) \leq 100$
	$6x_1 - x_2 + 4(x'_3 - 15) \leq 150$
siendo:	x_1, x_2 no negativas
y:	$x'_3 - 15 \geq -15$

Ordenando y generando una variable x_4 para agregar la constante en el funcional:

MAX:	$-3\,x_1 + 6\,x_2 - 4\,x'_3 + x_4$	
Sujeto a:	$4\,x_1 - x_2 - x'_3$	≥ 85
	$2\,x_1 + 3\,x_2 - 2\,x'_3$	≤ 70
	$6\,x_1 - x_2 + 4\,x'_3$	≤ 210
	x_4	$= 60$
siendo:	x_1, x_2, x'_3 y x_4 no negativas	

Resolviendo:

Z	37.50
x_1	23.21
x_2	7.86
x'_3	0
x_4	60

lo que implica que $x_3 = -15$

Variables irrestrictas

Cuando una variable x_i es irrestricta, o sea que puede asumir cualquier valor (positivo, cero o negativo), se debe reemplazar por una diferencia de dos variables no negativas, como se indica a continuación:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-$$

Estas variables son simétricas y en consecuencia, si se activa una de ella la otra no se activa. Es decir, pueden ser las dos variables nulas, o solamente una de ellas mayor a cero (pero nunca ambas mayores a cero).

Ejemplo 6.4:

MIN	$2\,x_1 + x_2 - 2\,x_3$	
Sujeto a	$x_1 + x_2 + 2\,x_3$	≤ 10
	$-4\,x_1 - x_2 + x_3$	≤ 8
	x_2	≥ 2
	$x_1 - x_2$	≤ 5
con:	$x_2, x_3 \geq 0$	

Para resolver se reemplaza en la formulación anterior

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-$$

quedando

$$\begin{array}{lrcl}
\text{MIN} & 2\,(x_1^+ - x_1^-) + x_2 - 2\,x_3 & & \\
\text{Sujeto a} & (x_1^+ - x_1^-) + x_2 + 2\,x_3 & \leq & 10 \\
& -4\,(x_1^+ - x_1^-) - x_2 + x_3 & \leq & 8 \\
& x_2 & \geq & 2 \\
& (x_1^+ - x_1^-) - x_2 & \leq & 5 \\
\text{con} & x_1^+, x_1^-, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

y se ordena para expresar el programa en el formato de PL:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{MIN} & 2\,x_1^+ - 2\,x_1^- + x_2 - 2\,x_3 & & \\
\text{Sujeto a} & x_1^+ - x_1^- + x_2 + 2\,x_3 & \leq & 10 \\
& -4\,x_1^+ + 4\,x_1^- - x_2 + x_3 & \leq & 8 \\
& x_2 & \geq & 2 \\
& x_1^+ - x_1^- - x_2 & \leq & 5 \\
\text{con} & x^+_1, x_1^-, x_2, x_3 \geq 0 & &
\end{array}$$

Resolviendo con LINDO:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP     3

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)    -10.00000

 VARIABLE          VALUE        REDUCED COST
    XP1          0.000000         0.000000
    XN1          1.333333         0.000000
    X2           2.000000         0.000000
    X3           4.666667         0.000000

    ROW      SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     2)          0.000000         -1.000000
     3)          0.000000          0.666667
     4)          0.000000         -1.000000
     5)          8.333333          0.000000

 NO. ITERATIONS=      3
```

Esto significa que el valor de x_1 será:

$$x_1 = x_1^+ - x_1^- = 0 - 1.3333 = -1.3333$$

Hay sistemas de programación lineal que permiten indicar cuáles son las variables que pueden asumir valores negativos con o sin restricciones. Si el sistema a utilizar no cuenta con esta facilidad, habrá que realizar las transformaciones arriba indicadas para resolver problemas con tales características.

En el sistema LINDO se indica que una variable x es irrestricta con el comando FREE, luego de la instrucción END, como sigue:

END

FREE X

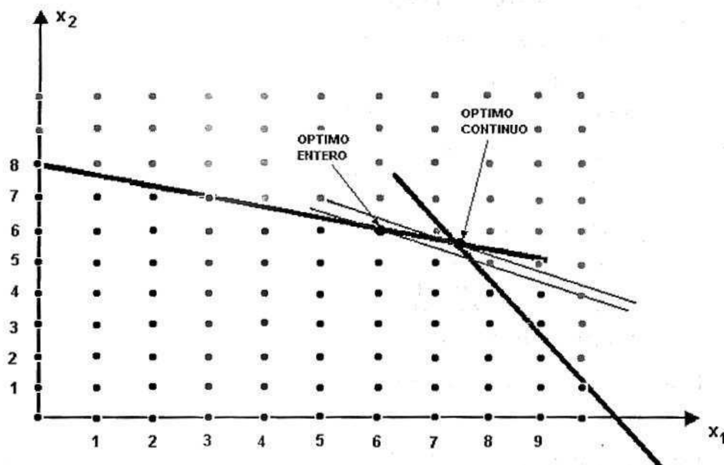
6.5 PROGRAMACIÓN ENTERA

Una variable entera puede tomar cualquier valor entero no negativo (0,1,2,3...). Este tipo de variables se utilizan cuando los valores continuos de las variables no sirven a efectos de tomar una decisión (por ejemplo, no se podría hablar de publicar 3.25 avisos en una revista ni contratar a 4.73 personas para llevar a cabo una tarea.

En general, para variables de naturaleza típicamente discreta la hipótesis de continuidad no se puede formular cuando sus niveles esperados de actividad son bajos. Esto significa que, por ejemplo, se deben publicar 3 avisos o 4 avisos en una revista, y que se deben contratar 4 o 5 personas para una tarea. El hecho de redondear una solución continua óptima (por ej. 3.25) brindada por el *Simplex* al entero más cercano (3) puede generar decisiones equivocadas. Por un lado, el redondeo puede llevar a una solución no óptima y por el otro a una solución no factible.

Los programas lineales que utilizan exclusivamente variables enteras se llaman "programas enteros". Si, además, incluyen variables continuas se denominan "programas enteros mixtos".

Por ejemplo, en la figura próxima, el óptimo continuo estaría en el punto x_1= 7.20 y x_2 = 5.6. El redondeo a la solución entera más cercana (x_1= 7 y x_2 = 6) daría un resultado no factible. Por otro lado, si se redondeara x_2 hacia abajo (x_1= 7 y x_2 = 5), la solución sería peor que la óptima que está en el punto (x_1= 6 y x_2 = 6).



Si, por el contrario, la función objetivo del modelo establece que se deben producir, por ejemplo, 1475.23 piezas por mes, el hecho de redondear el valor de la variable continua a 1475 (o aún a 1476) trae aparejado muy bajas consecuencias, prácticamente nulas, y por lo tanto es válido efectuar el redondeo.

Más aún, es recomendable asumir la continuidad de las variables cuando se espera un número grande en su valor, ya que el costo –en términos de resolución de un modelo con variables enteras– es excesivamente alto.

Si algunas variables (o todas) en un programa matemático deben ser discretas, se debe formular expresamente dicha condición. En particular, el sistema LINDO reconoce dos tipos de variables enteras: las binarias y las enteras generales.

Para identificar una variable como entera, el LINDO utiliza el comando GIN ("general integer"), que se debe ingresar una vez entrado el modelo en alguna de las dos formas siguientes:

GIN XX

o

GIN n

La primera forma, y más recomendable, identifica que la variable XX es entera general. Se debe ingresar tantas veces el comando GIN como variables enteras haya que definir.

La segunda forma identifica a las primeras "n" variables en la formulación del problema como enteras generales. Por ejemplo la instrucción "GIN 3" hace que las tres primeras variables del problema sean enteras. El orden de las variables se determina por el orden exacto en que se encuentran formuladas las variables en el modelo. En consecuencia, se deben presentar primero las variables enteras, lo que puede ser peligroso si las variables no forman parte de la función objetivo. Sin embargo, esta forma es muy eficiente cuando todas las variables son enteras.

Para resolver los programas enteros existen varios métodos heurísticos, entre los que podemos mencionar los basados en planos de corte, el algoritmo de Gomory y los métodos de ramificación y acotación (llamados de *branch and bound* o *Land-Doig*)

El LINDO, por ejemplo, utiliza el método *branch-and-bound* para resolver los problemas de programación entera.

Esta técnica realiza la búsqueda de las soluciones que surgen de ir excluyendo porciones de continuidad de las variables mediante un mecanismo de "limitación" para diferentes "ramas" que se van formando. Si bien el método es eficaz, el tiempo de resolución de un problema aumenta considerablemente, por lo que la condición de continuidad debe utilizarse solamente cuando sea necesario. Por otra parte, debe tenerse en cuenta que los costos reducidos y los precios sombra de la solución encontrada no tienen el significado físico económico que hemos explicado para las variables continuas, sino que por el contrario, se refieren a consecuencias de saltos de soluciones entre diversas ramas. Por lo tanto, no deben considerarse los valores de las variables duales que surgen de la solución óptima en los problemas enteros.

Lo más recomendable es resolver primero el problema como continuo, ya que puede ocurrir que la solución óptima dé como resultado valores enteros a las variables. En caso contrario, se agrega la instrucción que hace discretizar a las variables (por ejemplo, el comando GIN, en el sistema LINDO).

El método de *branch-and-bound* también resuelve, como primer paso, el problema como si fuera continuo. Si una variable declarada como entera, digamos x, dio un resultado continuo (por ejemplo 5.20) se generan dos nuevos problemas (o ramas). El primero de ellos limita a la variable x agregando la restricción $x \geq 6$ y el segundo la limita agregando la restricción $x \leq 5$. De esta forma se elimina la porción continua de la variable x entre 5 y 6, por lo que las soluciones de cada rama tendrán a la variable x como variable entera.

El proceso consiste básicamente en las siguientes etapas:

1. Encontrar la solución continua óptima.
2. Si la solución es entera, terminar el proceso. Si la solución es continua, pasar a la etapa 3.
3. Elegir arbitrariamente una variable continua y generar dos ramas (procedimiento de ramificación). En la primera rama se limita a la variable elegida para que sea mayor o igual al entero superior a su valor y en la segunda rama se la limita para que sea menor o igual al entero inferior (procedimiento de limitación).
4. Resolver los PL para cada una de las ramas y comparar los funcionales.
5. Seleccionar para la investigación aquella rama cuyo resultado sea mejor a cualquiera de las soluciones enteras conocidas. Descartar ramas incompatibles.
6. Seleccionar el programa lineal que tenga el mejor valor de la función objetivo y pasar a la etapa 2.

Ejemplo 6.5:

MAX:	$6x_1 + 5x_2$
Sujeto a:	$2x_1 + 4x_2 \leq 80$
	$3x_1 + 2x_2 \leq 55$
siendo:	x_1, x_2 enteras no negativas

En primer lugar se resuelve el problema como si fuera continuo. El resultado es el siguiente:

$x_1 =$	7.50
$x_2 =$	16.25
$Z =$	126.25

La solución óptima no es entera. Entonces se selecciona una variable, por ejemplo x_1 y se ramifica el problema en dos ramas A y B. La rama A incluye la restricción $x_1 \geq 8$ y la rama B incluye la restricción $x_1 \leq 7$.

RAMA A:

MAX:	$6x_1 + 5x_2$
Sujeto a:	$2x_1 + 4x_2 \leq 80$
	$3x_1 + 2x_2 \leq 55$
	$x_1 \geq 8$
siendo:	x_1, x_2 enteras no negativas

RAMA B:

MAX:	$6x_1 + 5x_2$
Sujeto a:	$2x_1 + 4x_2 \leq 80$
	$3x_1 + 2x_2 \leq 55$
	$x_1 \leq 7$
siendo:	x_1, x_2 enteras no negativas

Las soluciones para cada uno de estos programas serán, por supuesto, peores que la solución continua. En efecto, resolviendo, tendremos que:

RAMA A:

$x_1 =$ 8
$x_2 =$ 15.50
$Z =$ 125.5

RAMA B:

$x_1 =$ 7
$x_2 =$ 16.50
$Z =$ 124.5

Si bien, la variable x_1 es ahora discreta, ninguna de las soluciones es entera. Como la rama A da un mejor resultado que la rama B, se explora la rama A. Limitando a $x_2 \geq 16$ y $x_2 \leq 15$ se forman las ramas A1 y A2:

RAMA A1:

MAX: $6x_1 + 5x_2$

Sujeto a:
$$2x_1 + 4x_2 \leq 80$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 55$$
$$x_1 \geq 8$$
$$x_2 \geq 16$$

siendo: x_1, x_2 enteras no negativas

RAMA A2:

MAX: $6x_1 + 5x_2$

Sujeto a:
$$2x_1 + 4x_2 \leq 80$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 55$$
$$x_1 \geq 8$$
$$x_2 \leq 15$$

siendo: x_1, x_2 enteras no negativas

cuyas soluciones son:

RAMA A1:

No factible

RAMA A2:

$x_1 =$	8.33
$x_2 =$	15
$Z =$	125

La rama A1 no es factible por lo que se descarta. La rama A2, lamentablemente, tampoco es entera ya que la variable x_1 es ahora nuevamente continua. Se debe comparar ahora este resultado con el de la rama B para determinar por dónde se sigue la exploración. Como el funcional de A2 es aún mejor que el de B, se prosigue el análisis por la rama A2.

Haciendo los nuevos límites $x_1 \geq 9$ (rama A21) y $x_1 \leq 8$ (rama A22):

RAMA A21:

MAX:	$6\,x_1 + 5\,x_2$
Sujeto a:	$2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 80$
	$3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 55$
	$x_1 \geq 9$
	$x_2 \leq 15$
siendo:	x_1, x_2 enteras no negativas

RAMA A22:

MAX:	$6\,x_1 + 5\,x_2$
Sujeto a:	$2\,x_1 + 4\,x_2 \leq 80$
	$3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 55$
	$x_1 \leq 8$
	$x_2 \leq 15$
siendo:	x_1, x_2 enteras no negativas

cuyas soluciones son:

RAMA A21:

$x_1 =$	9
$x_2 =$	14
$Z =$	124

RAMA A22:

$x_1 =$	8
$x_2 =$	15
$Z =$	123

En este caso las dos soluciones son enteras. La rama A22 se descarta porque el funcional de la rama A21 es mejor.

Se compara ahora el funcional de A21 (cuyo valor es 124) con el de B (124.5). Si el funcional de la rama A21 hubiera sido mejor que el de la rama B, se habría terminado el proceso. Sin embargo, como esto no es así, se debe explorar la rama B porque podría ocurrir que por ella se encuentre una solución entera mejor que la de A21.

Se ramifica, entonces, B para $x_2 \geq 17$ y para $x_2 \leq 16$:

RAMA B1:

MAX:	$6x_1 + 5x_2$
Sujeto a:	$2x_1 + 4x_2 \leq 80$
	$3x_1 + 2x_2 \leq 55$
	$x_1 \leq 7$
	$x_2 \geq 17$
siendo:	x_1, x_2 enteras no negativas

RAMA B2:

MAX:	$6x_1 + 5x_2$
Sujeto a:	$2x_1 + 4x_2 \leq 80$
	$3x_1 + 2x_2 \leq 55$
	$x_1 \leq 7$
	$x_2 \leq 16$
siendo:	x_1, x_2 enteras no negativas

cuyas soluciones son:

RAMA B1:

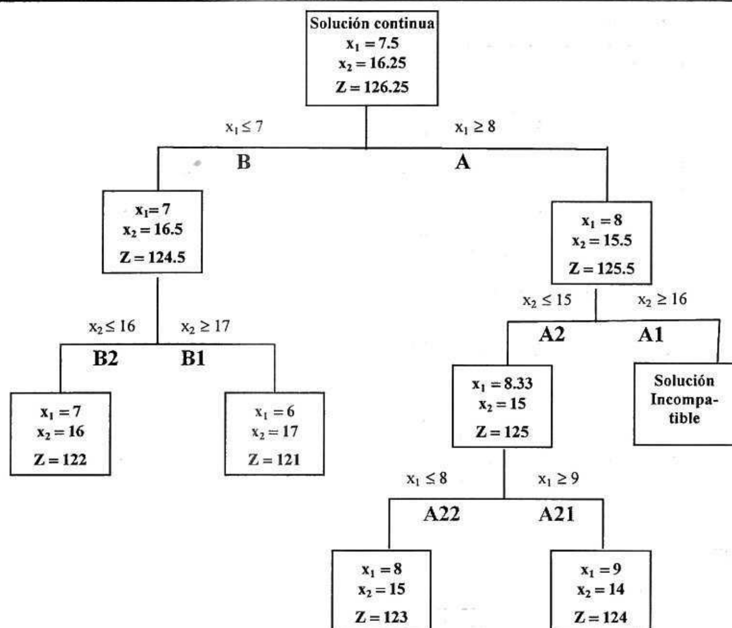
$x_1 =$	6
$x_2 =$	17
$Z =$	121

RAMA B2:

$x_1 =$	7
$x_2 =$	16
$Z =$	122

Ambas soluciones son enteras, por lo que se dejan de explorar esas ramas. Entre ellas se selecciona la B2 por ser la que corresponde al mejor valor del funcional. Finalmente, se compara B2 con A21, de donde se concluye que A21 es la solución óptima del problema, es decir $x_1 = 9$ y $x_2 = 14$.

En el gráfico siguiente se resume el método de *branch and bound* (ramificación y limitación) correspondiente al problema del ejemplo.



Como se puede observar, el método es simple aplica una lógica secuencial heurística que permite anticipar un buen número de soluciones factibles alejadas del óptimo. No obstante, requiere una gran cantidad de resoluciones lineales para llegar al óptimo.

Este problema del ejemplo resuelto por el LINDO se formula simplemente de la siguiente manera:

```
MAX    6 X1 + 5 X2
SUBJECT TO
2)  2 X1 + 4 X2 <=  80
3)  3 X1 + 2 X2 <=  55
END
GIN    2
```

El sistema resuelve el modelo utilizando el método de *branch and bound* y el informe de la solución óptima es el siguiente:

```
OBJECTIVE VALUE =   126.250000

SET     X1 TO <=    7 AT   1, BND=  124.5    TWIN=  125.5        6
SET     X2 TO >=   17 AT   2, BND=  121.0    TWIN=  122.0        9

NEW INTEGER SOLUTION OF    121.000000    AT BRANCH     2 PIVOT      9
BOUND ON OPTIMUM:  125.5000
FLIP     X2 TO <=        16 AT   2 WITH BND=    122.00000

NEW INTEGER SOLUTION OF    122.000000    AT BRANCH     2 PIVOT      9
```

```
BOUND ON OPTIMUM: 125.5000
DELETE    X2 AT LEVEL  2
FLIP    X1 TO >=      8 AT   1 WITH BND=   125.50000
SET    X2 TO <=   15 AT   2, BND=  125.0   TWIN=-0.1000E+31    11
SET    X1 TO >=   9 AT   3, BND=  124.0   TWIN=  123.0      13

NEW INTEGER SOLUTION OF   124.000000   AT BRANCH    4 PIVOT    13
BOUND ON OPTIMUM: 124.0000
DELETE    X1 AT LEVEL  3
DELETE    X2 AT LEVEL  2
DELETE    X1 AT LEVEL  1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=   4 PIVOTS=    13

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

    OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)    124.0000

 VARIABLE          VALUE        REDUCED COST
    X1            9.000000        -6.000000
    X2           14.000000        -5.000000

   ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
    2)            6.000000        0.000000
    3)            0.000000        0.000000

NO. ITERATIONS=     13
BRANCHES=   4 DETERM.= 1.000E   0
```

Tal como se ha mencionado, los costos de oportunidad (*reduced costs*) y los valores marginales (*dual prices*) no tienen los significados que se han explicado para los problemas continuos. En consecuencia, no se los debe considerar en tal sentido.

El mismo método de *branch and bound* se puede utilizar para resolver problemas enteros mixtos y problemas de programación entera binaria. Aquí también, basta analizar en cada nodo no bifurcado si la solución es factible y si el valor del objetivo asociado es el mejor hasta el momento.

6.6 PROGRAMACIÓN ENTERA BINARIA

Las variables enteras binarias constituyen un caso particular de variables enteras y son aquellas que pueden asumir solamente valores 0 o 1. Los programas matemáticos que utilizan exclusivamente este tipo de variables se llaman "programas binarios". Si incluyen, además, otro tipo de variables se llaman "programas binarios mixtos".

El hecho de que la variable binaria pueda tomar solamente el valor 1 cuando está activa permite resolver innumerables problemas de decisión del tipo "pasa o no-pasa", "se hace o no se hace", "se invierte o no se invierte", "se compra o no se compra", etcétera. También se utilizan para formular problemas de asignación, de optimización de redes y, en combinación con variables continuas, para resolver problemas de economía de escala, de lotes mínimos, de costos fijos, y de muchos otros casos que serían imposibles plantear con la programación continua convencional.

Para identificar una variable como entera binaria, el LINDO utiliza el comando INT (*integer*), que se debe ingresar una vez formulado el modelo en alguna de las dos formas siguientes:

INT XX

o

INT n

La primera forma, y más recomendable, identifica que la variable XX es entera binaria. Se debe ingresar tantas veces el comando INT como variables enteras binarias haya que definir.

La segunda forma identifica a las primeras "n" variables en la formulación del problema como enteras binarias. Por ejemplo INT 3 hace que las tres primeras variables del problema sean enteras binarias. El orden de las variables se determina por el orden exacto en que se encuentran formuladas las variables en el modelo. En consecuencia, se deben plantear primero las variables binarias, y se deben tener las mismas precauciones, si se utiliza esta forma, que las comentadas para las variables enteras generales.

Para ejemplificar las formulaciones de la programación binaria, utilizaremos en nuestros ejemplos la nomenclatura "I_i" para referirnos a las variables binarias en contraposición a las variables continuas "x_i". En la práctica, por supuesto, los nombres de las variables binarias pueden ser cualquiera y preferiblemente mnemotécnicos.

ACTIVACIÓN DE VARIABLES CONTINUAS

Las variables binarias se pueden utilizar para permitir la activación de una variable continua. En tal caso, las variables x_i e I_i están relacionadas siempre mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{x_i = M \cdot I_i \leq 0}$$

en donde M es un valor arbitrariamente alto o la cota superior de x_i si se conoce. Esto significa que cuando la variable I_i es igual a cero x_i será también igual a cero, y cuando I_i se activa, x_i puede asumir un valor distinto de cero.

Cabe mencionar que en PL binaria las variables toman valores distintos de cero solamente si se necesita que estén activadas en términos de optimización del funcional o para satisfacer restricciones impuestas. Esto significa que cuando la variable I_i toma el valor 1 es porque su variable continua asociada x_i debe asumir por alguna razón un valor distinto de cero; en caso contrario I_i no se activa.

La posibilidad de activación de variables continuas es, tal vez, una de las aplicaciones más comunes de las variables binarias en la programación matemática. Describiremos a continuación varios ejemplos de formulación, que deben tomarse por supuesto solo como una parte de la formulación del problema completo:

a. Lote mínimo:

Si se fabrica un producto "A", deben producirse por lo menos 100 unidades:

$x_A - M\, I_A \leq 0$

$x_A - 100\, I_A \geq 0$

Esto significa que cuando I_A vale 0 x_A vale cero, y cuando I_A vale 1 x_A puede asumir cualquier valor comprendido entre 100 y M.

b. Exclusión de alternativas de fabricación:

1) *En una torre de destilación con una capacidad de 1000 m^3 por día se puede procesar uno solo de los crudos A, B y C:*

$$x_A - 1000\ I_A \leq 0$$
$$x_B - 1000\ I_B \leq 0$$
$$x_C - 1000\ I_C \leq 0$$
$$I_A + I_B + I_C \leq 1$$

Supongamos que se activa solamente I_B; esto significa que sólo se podrá activar x_B, mientras que x_A y x_C serán igual a cero.

La última restricción también se podría formular como una restricción de igual, aunque no es recomendable hacerlo a menos que sea necesario por alguna otra razón de formulación.

2) *En el problema anterior, no se pueden correr más de dos crudos.*

En este caso se debe reemplazar la última ecuación por:

$$I_A + I_B + I_C \leq 2$$

c. Inclusión de alternativas de fabricación:

En el problema del punto 1) del caso anterior, *se deben correr por lo menos dos crudos.*

Aquí se debe reemplazar la última ecuación por:

$$I_A + I_B + I_C \geq 2$$

Sin embargo, si el problema se formula de esta manera, se deben agregar también restricciones con los mínimos requeridos, ya que de lo contrario podría ocurrir que se activen, por ejemplo, I_A e I_B pero que se active solamente x_A. Una formulación correcta de la restricción sería:

Se deben correr por lo menos dos crudos y como mínimo 200 m^3 de cada uno de ellos, en cuyo caso habría que agregar:

$$x_A - 200\ I_A \geq 0$$

$$x_B - 200\ I_B \geq 0$$

$$x_C - 200\ I_C \geq 0$$

d. Mezclas de productos:

Esta es una aplicación típica de la programación binaria, en donde es muy común que existan compatibilidades o incompatibilidades entre los componentes de la mezcla, lo que hace que se deban plantear restricciones de inclusión o exclusión. Tomaremos como ejemplo un producto P que se forma como una mezcla (en cualquier proporción) de los componentes A, B, C, D y E, por lo que formularemos en primer lugar las siguientes restricciones de vinculación entre las variables continuas y sus correspondientes variables binarias:

$$x_A - M\ I_A \leq 0$$

$$x_B - M\ I_B \leq 0$$

$x_C - M\,I_C \leq 0$

$x_D - M\,I_D \leq 0$

$x_E - M\,I_E \leq 0$

en donde M es un valor arbitrariamente alto.

a) *Si A está incluido en la mezcla, se debe incluir por lo menos una cantidad m de B en la mezcla*:

$$I_B - I_A \geq 0$$

ecuación a la que se le debe agregar la siguiente (según hemos explicado más arriba):

$$x_B - m_B\,I_A \geq 0$$

en donde m_B es la cantidad mínima exigida del componente B.

b) *Si A está incluido B también debe estar incluido, y viceversa*:

$$I_B - I_A = 0$$

También aquí se requerirá alguna condición adicional de cantidades mínimas.

c) *Si A o B o ambos están incluidos, debe estar por lo menos uno de C, D o E incluidos en la mezcla*:

Para formular este caso se puede agregar una variable I que se active cuando A esté en la mezcla o B esté en la mezcla o ambos estén incluidos.

$$I_B + I_A - 2\,I \leq 0$$

$$-I_C - I_D - I_E + I \leq 0$$

Esta formulación requerirá también de alguna restricción adicional en cuanto a cantidades.

ACTIVACIÓN DE RESTRICCIONES:

Las variables binarias se utilizan también para formular ecuaciones sólo en ciertas condiciones de valores de variables. Algunos ejemplos son los siguientes:

a. Inclusión condicional de restricciones:

Si A se produce, entonces hay que agregar la siguiente restricción: $\sum a_j x_j \leq b$

Para formular matemáticamente esta proposición se deben formular las siguientes restricciones:

$$x_A - M.I_A \leq 0$$

$$\sum a_j x_j + M.I_A \leq M + b$$

Con la primera restricción se activa I_A solamente cuando x_A es distinto de cero.

La segunda restricción queda activada cuando I_A es igual a 1, ya que se simplifican los M. Cuando I_A es igual a 0, la restricción queda no limitativa (o sea redundante), ya que es menor o igual a un valor arbitrariamente alto; el efecto es como si no estuviera planteada.

b. Elección entre distintas alternativas del mismo proceso:

Se pueden contratar 620 hs o 720 hs u 820 hs de Tratamiento Térmico. Cada unidad de A requiere 9 hs de TT y cada unidad de B, 18 hs:

$$9\,x_1 + 18\,x_2 - 620\,I_A - 720\,I_B - 820\,I_C \leq 0$$

$$I_A + I_B + I_C = 1$$

c. Elección entre procesos alternativos:

Hay dos tecnologías de Tratamiento Térmico. En la primera de ellas, cada unidad de A requiere 9 hs y cada unidad de B, 18 hs, y se tiene una disponibilidad de 720 hs por mes. La segunda tecnología requiere 8 hs para cada unidad de A y 19 hs para cada unidad de B, disponiéndose de 800 hs por mes.

$$9\,x_1 + 18\,x_2 - M\,I_A \leq 720$$

$$8\,x_1 + 19\,x_2 - M\,I_B \leq 800$$

$$I_A + I_B = 1$$

Si $I_A = 0$ la primera restricción queda activa y la segunda no limitativa. En cambio si I_B es igual a cero, queda activa la restricción correspondiente a la segunda tecnología.

FORMULACIÓN DE RECINTOS NO CONVEXOS:

La programación binaria puede utilizarse para formular problemas con recintos lineales no convexos. Un recinto lineal no convexo puede expresarse como unión de varios recintos convexos. La solución óptima del problema estará en alguno de estos conjuntos.

Las variables binarias sirven para explicitar cada uno de los recintos en una formulación de PL convexa. Supongamos el siguiente problema de programación matemática:

Ejemplo 6.5

$$\begin{array}{lrl}
\text{MAX:} & x_1 + x_2 & \\
\text{Sujeto a:} & x_2 \leq 17 & \text{para } x_1 \leq 6 \\
 & -x_1 + 1.75\,x_2 \leq 14 & \text{para } x_1 \geq 6 \\
 & 1.43\,x_1 - x_2 \leq 10 & \text{para } x_2 \geq 7 \\
 & x_2 \leq 7 & \text{para } x_1 \geq 12 \\
 & x_1 - 1.40\,x_2 \leq 14 & \text{para } x_2 \leq 7 \\
\text{Siendo:} & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

El recinto de soluciones factibles de este problema constituye un polígono no convexo, como se muestra en la siguiente figura:

El problema de los recintos no convexos radica en el hecho de que una vez que el algoritmo del *Simplex* encuentra una solución que no puede mejorar en la próxima iteración, la considera la solución óptima y termina el proceso. No obstante, pueden existir óptimos locales (o parciales). Supongamos que el algoritmo siguiera el camino O-A-B-C. Conforme al criterio de optimalidad del algoritmo del *Simplex*, el procedimiento se terminaría en el punto B; sin embargo, ésta es una solución óptima parcial. Tal como se puede observar en la figura, el punto D es el óptimo global.

Algunos pocos sistemas de programación matemática, como el de Haverly Inc., tienen la opción de forzar al procedimiento para que siga iterando al llegar a una solución aparentemente óptima, cuando se formula un problema que podría resultar no convexo. Sin embargo, la mayoría de los sistemas no cuenta con esta herramienta, por lo que se debe proce-

der a formular el problema como un programa matemático convexo convencional, haciendo uso de las variables binarias.

Para formular el problema del ejemplo en el contexto de PL se consideran, en primer lugar, los siguientes tres polígonos convexos:

1) OJFG, dado por las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rl} x_2 & \leq 17 \\ x_1 & \leq 6 \end{array}$$

2) OKDH, dado por las restricciones:

$$\begin{array}{rl} -x_1 + 1.75\,x_2 & \leq 14 \\ 1.43\,x_1 - x_2 & \leq 10 \end{array}$$

3) OABI, dado por las restricciones:

$$\begin{array}{rl} x_2 & \leq 7 \\ x_1 - 1.42\,x_2 & \leq 14 \end{array}$$

Posteriormente se definen las variables binarias I_1 para el primer recinto, I_2 para el segundo e I_3 para el tercero. Por último, se plantea el programa lineal:

$$\begin{array}{rl} x_2 - M\,I_1 & \leq 17 \\ x_1 - M\,I_1 & \leq 6 \\ -x_1 + 1.75\,x_2 - M\,I_2 & \leq 14 \\ 1.43\,x_1 - x_2 - M\,I_2 & \leq 10 \\ x_2 - M\,I_3 & \leq 7 \\ x_1 - 1.42\,x_2 - M\,I_3 & \leq 14 \\ I_1 + I_2 + I_3 & = 2 \end{array}$$

Una variable I_i activa significa que no se activa el recinto correspondiente, ya que las restricciones que lo definen quedarían no limitativas (redundantes). La solución óptima se encontrará, entonces, en el recinto correspondiente a la variable I_i nula.

Para plantear el problema con el sistema LINDO se pone un valor suficientemente grande a M y, como hemos dicho, se definen las variables binarias con el comando INT:

```
MAX x1+x2
ST
x2 - 1000 I1 < 17
x1 - 1000 I1 < 6
- x1 + 1.75 x2 - 1000 I2 < 14
1.43 x1 - x2 - 1000 I2 < 10
x2 - 1000 I3 < 7
x1 - 1.42 x2 - 1000 I3 < 14
I1 + I2 + I3 = 2
END
INT I1
INT I2
INT I3
```

Resolviendo el problema, así planteado, tendremos:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP     5
OBJECTIVE VALUE =   1568.82605
```

```
SET     I2 TO <=   0 AT   1, BND=  40.95    TWIN= 1012.       19

NEW INTEGER SOLUTION OF   40.9450912   AT BRANCH    1 PIVOT    19
BOUND ON OPTIMUM:  1012.000
FLIP     I2 TO >=       1 AT    1 WITH BND=   1012.0000
SET      I1 TO >=    1 AT   2, BND=  28.52   TWIN= 23.00       25
DELETE     I1 AT LEVEL   2
DELETE     I2 AT LEVEL   1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=    2 PIVOTS=     25

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND

RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
     OBJECTIVE FUNCTION VALUE
     1)    40.94509

VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
   I1          1.000000         0.000000
   I2          0.000000         -3447.587402
   I3          1.000000         0.000000
   X1         20.965057         0.000000
   X2         19.980034         0.000000

   ROW   SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
    2)       997.019958        0.000000
    3)       985.034912        0.000000
    4)        0.0000000        1.617304
    5)        0.0000000        1.830283
    6)       986.019958        0.000000
    7)       1021.40662        0.000000
    8)        0.0000000        0.000000

NO. ITERATIONS=    28
BRANCHES=   2 DETERM.=  1.000E   0
```

COSTOS FIJOS

En la formulación de algunos sistemas físico-económicos, cuando se activa una actividad, se incurre (adicionalmente al costo variable) en un costo fijo. Esta situación no podría formularse sin el auxilio de las variables binarias.

Supongamos la siguiente proposición: *Si se fabrica el producto A habrá un costo fijo de $5000 más $30 por unidad elaborada.*

Esta formulación requiere vincular a la variable x_1 (cantidad a fabricar de A) con una variable I_1 que se active solamente si se fabrican unidades de A:

$$x_1 - M \cdot I_1 \leq 0$$

y en el funcional habrá que hacer contribuir a la variable x_1 con el costo variable y a I_1 con el costo fijo. Suponiendo que la función objetivo del problema sea de minimización, tendremos:

MIN: .... $+ 30\, x_1 + 5000\, I_1 +$ ....

ECONOMÍA DE ESCALA

La PL convencional asume que los valores c_i que afectan al funcional se mantienen para cualquier valor de la variable x_i. Sin embargo, existen problemas de economía de escala en donde los coeficientes del funcional se mantienen sólo dentro de un cierto rango. Las variables binarias permiten resolver este problema en el ámbito de la PL. Tomemos por el ejemplo el siguiente caso:

Se adquiere un producto A a un proveedor que ofrece la siguiente política de descuentos:

Hasta 150 kg: $10 por kg
Entre 150 Kg y 300 Kg: $9 por kg
A partir de 300 Kg: 7.50 $ por kg

La variable x_1 (cantidad a comprar de A) se puede expresar como la suma de tres variables mutuamente excluyentes x_{11}, x_{12} y x_{13}. Mediante la utilización de las variables binarias se define a cada variable x_{1i} en el rango correspondiente de x_1 y se establece la condición de exclusión:

$$-x_1 + x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0$$
$$x_{11} - 150\, I_1 \leq 0$$
$$x_{12} - 150\, I_2 \geq 0$$
$$x_{12} - 300\, I_2 \leq 0$$
$$x_{13} - 300\, I_3 \geq 0$$
$$x_{13} - M\; I_3 \leq 0$$
$$I_1 + I_2 + I_3 = 1$$

Finalmente, en el funcional se afecta a cada variable x_{1i} por su costo de adquisición. Asumiendo que el problema es de maximización, tendremos que:

$$\text{MAX: } \ldots\ldots\ldots - 10\, x_{11} - 9\, x_{12} - 7.5\, x_{13} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ASIGNACIÓN

Los problemas de asignación, que constituyen un caso típico de aplicación de programación lineal, son aquellos en los cuales se debe asignar una actividad i a una entidad j con el objeto de optimizar alguna función de efectividad. Algunos ejemplos pueden ser la asignación de tareas a personas, de trabajos a máquinas, de proyectos a empresas, de docentes a cursos, de camiones a plataformas, etcétera. Cada asignación particular de una variable i a una entidad j contribuye a la función objetivo planteada con un coeficiente c_{ij}.

En los modelos matemáticos de asignación se utilizan variables de decisión binarias I_{ij}. Cuando una variable I_{ij} se activa significa que se asigna la actividad i a la entidad j.

Es obvio que la cantidad de actividades a asignar no puede superar a la cantidad de entidades. Si bien el algoritmo del *Simplex* se puede utilizar para resolver este tipo de problemas, cabe mencionar que existen algoritmos especiales para su resolución que resultan más eficientes para problemas sencillos.

La formulación de los problemas de asignación con igual cantidad de actividades que de entidades es la siguiente:

$$MIN: \quad \sum_{1}^{n}\sum_{1}^{m} c_{ij}\, I_{ij}$$

$$Sujeto\ a: \quad \sum_{i=1}^{n} I_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} I_{ij} = 1$$

$$siendo: \quad I_{ij} \quad binarias$$

OPTIMIZACIÓN DE REDES

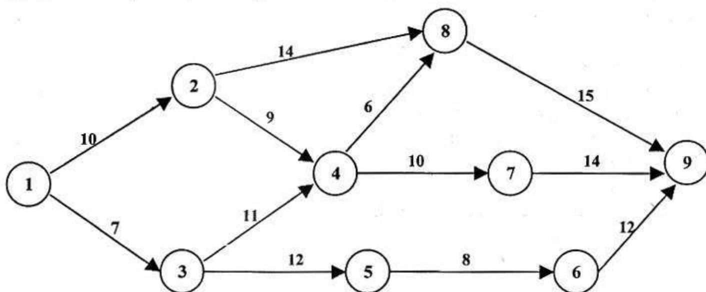
Ciertos problemas de decisión multi-etapas, denominados "programación dinámica", de administración de proyectos, y de ruteo (de ruta mínima o de ruta máxima) se formulan como redes constituidas por un conjunto de nodos y flechas que los vinculan. Para estos casos también se dispone de metodologías específicas de resolución eficientes, aunque pueden formularse como problemas de programación lineal binaria.

El problema consiste en determinar una secuencia de actividades que va desde el primer nodo hasta el último nodo a fin de optimizar un resultado. Cada variable binaria determina si se realiza o no una actividad determinada. Se formula una ecuación de balance en cada nodo, de modo que se pueda activar una sola variable de ingreso y una sola variable de egreso de dicho nodo, con excepción del primer nodo y del último. En el primer nodo se debe activar solamente una variable de egreso, y en el último nodo sólo una variable de ingreso.

En los problemas de programación dinámica, las variables del problema son "decisiones" que se deben tomar desde el estado inicial en la primera etapa del proceso hasta el estado final de la última etapa, a fin de maximizar o minimizar una función. La secuencia de decisiones que se adopta se denomina "política óptima".

Otro ejemplo son los problemas de administración de proyectos, en donde se debe determinar la secuencia de actividades cuya suma de tiempos de ejecución sea máxima. Esta secuencia se denomina "camino crítico".

Supongamos el siguiente ejemplo: *En el gráfico se muestran las relaciones de precedencia y secuencia entre actividades y sus duraciones. Determinar la ruta que genera la mayor duración total (camino crítico).*



La formulación del problema de P.L., en el formato de cuadro matricial extendido, es la siguiente:

	I_{12}	I_{13}	I_{24}	I_{28}	I_{34}	I_{35}	I_{48}	I_{47}	I_{56}	I_{89}	I_{79}	I_{69}		**RHS**
MAX	10	7	9	14	11	12	6	10	8	15	14	12		
1)	1	1											=	1
2)	1		-1	-1									=	0
3)		1			-1	-1							=	0
4)			1		1		-1	-1					=	0
5)						1			-1				=	0
6)									1			-1	=	0
7)								1			-1		=	0
8)				1			1			-1			=	0
9)										1	1	1	=	1

Otros problemas de redes, como los de maximización de flujo, se formulan y se resuelve como problemas de PL convencional.

VIAJANTE DE COMERCIO

Un problema práctico para el que aún no se ha encontrado un algoritmo eficiente en términos de tiempo de resolución es el denominado "problema del viajante de comercio" que consiste en un corredor comercial que debe recorrer "n" ciudades, una por vez, pasando por todas ellas y debiendo retornar a la ciudad de la cual partió. El objetivo es efectuar el recorrido minimizando la distancia total.

La formulación matemática de este problema también es un problema lineal binario, en donde:

$$\text{MIN}: \quad \sum d_{ij}.I_{ij} + \sum d_{ji}.I_{ji}$$

$$\text{Sujeto a}: \quad \sum I_{ij} = 1 \quad \text{para cada ciudad y siendo } i \neq j$$

$$\sum I_{ji} = 1 \quad \text{para cada ciudad y siendo } i \neq j$$

en donde d_{ij} es la distancia existente entre la ciudad i y la ciudad j.

Si la solución que se encuentra al problema da un recorrido único, entonces es óptima. La siguiente solución, para 8 ciudades por ejemplo, y partiendo de la ciudad 1, podría ser óptima:

$$I_{16} = I_{68} = I_{83} = I_{35} = I_{52} = I_{27} = I_{74} = I_{41} = 1$$

Lamentablemente suele ocurrir que el resultado tiene varios sub-recorridos, como ser:

$$I_{13} = I_{36} = I_{64} = I_{42} = I_{21} = 1 \quad \text{y} \quad I_{75} = I_{58} = I_{87} = 1$$

En tales casos se deben agregar formulaciones matemáticas lineales que eviten la formación de los mismos. Una forma de evitar los subciclos es agregando las siguientes restricciones adicionales:

$$u_i - u_j + (n-1)\, I_{ij} \leq n - 2$$

siendo n: cantidad de ciudades a recorrer y

u_i: variable entera que indica la secuencia en que la ciudad i es visitada.

6.7 PROGRAMACIÓN DE METAS

En los sistemas reales caracterizados por la existencia de múltiples objetivos, y frecuentemente conflictivos, se pueden formular los denominados modelos de programación de metas. Este enfoque introduce dos nuevos conceptos. El primero de ellos es la denominada "restricción de meta", en contraposición con las denominadas restricciones estructurales ("restricciones recursos" o "restricciones requerimiento") características de las formulaciones lineales convencionales. El segundo concepto importante es el nivel de prioridades entre las distintas metas.

En los problemas de programación de metas se tienen, además de las variables de decisión (que son las propias del problema), las denominadas variables de desviación que miden la separación entre el objetivo logrado y la meta propuesta.

Una proposición que lleva a una restricción estructural típica sería: *"se deben fabricar por lo menos 10 unidades del producto A"* cuya formulación matemática es:

$$x_1 \geq 10$$

Aquí no se admiten valores inferiores a 10, y si no se logra cumplir con dicha restricción el problema será incompatible. Sin embargo, podría ocurrir que la anterior no fuera una restricción real sino que, por el contrario, sea solamente una expresión de deseo. En tal caso, la expresión verbal del problema debería ser *"si fuera posible, se deberían fabricar por lo menos 10 unidades de A"*. La formulación matemática de esta proposición nos lleva a plantear la denominada restricción de meta en la siguiente forma:

$$x_1 + d^- - d^+ = 10$$

en donde:

x_1: cantidad de unidades a fabricar de A

d^- : déficit en lograr la meta (en cantidad de unidades)

d^+ : superación de la meta (en cantidad de unidades)

Las restricciones de metas se expresan siempre como igualdades.

Si el tomador de decisiones puede establecer alguna forma de ponderación que indique la forma de penalizar el hecho de no alcanzar las metas, el problema se puede expresar como un problema de PL en donde se trata de minimizar el desvío medido en la importancia o peso relativo de no lograr la meta.

Los objetivos de los programas de metas son siempre de minimización y las variables que participan en ellos son únicamente variables de desviación.

En muchos casos no se puede precisar la importancia relativa de todas las metas, pero se las puede ordenar por su importancia desde las de mayor prioridad a las de menor prioridad. En estos casos en donde las metas no son conmensurables los coeficientes de la función objetivo son valores P_1, P_2, ..., P_i, siendo $P_1 >> P_2 >> .... >> P_i$, y correspondiendo P_1 a la meta de mayor prioridad, P_2 a la meta de la siguiente prioridad, y así sucesivamente.

<u>Ejemplo 6.6:</u>

Una fábrica elabora dos productos A y B, utilizando mano de obra y materia prima. Cada unidad de A necesita 3 hs de mano de obra y 2 Kg de materia prima. Para fabricar una unidad de B se precisa 2 horas de mano de obra y 5 Kg de materia prima. La contribución marginal que se obtiene por la venta de A es de $5 y de B, de $7. Se dispone por sema-

na de 152 horas de mano de obra y 160 Kg de materia prima. El objetivo es lograr las siguientes metas:

a) fabricar por lo menos 22 unidades de B. Se evalúa en 10 unidades la penalización por unidad de no lograr la meta.
b) obtener un beneficio de $300. Se evalúa en 1 unidad la penalización por cada peso que no se logra la meta.

En este problema se tienen cuatro restricciones: dos estructurales y dos de meta. Las primeras son:

$$3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 152$$

$$2\,x_1 + 5\,x_2 \leq 160$$

La meta de fabricar por lo menos las 22 unidades de A se puede plantear del siguiente modo:

$$x_2 + d_1^- - d_1^+ = 22$$

La variable de desviación d_1^- indica en cuántas unidades no se logra la meta de fabricar 22 unidades por semana, y la meta d_1^+ representa las unidades en que se excede dicho objetivo. Por su parte, la meta del beneficio está dada por la siguiente formulación:

$$5\,x_1 + 7\,x_2 + d_2^- - d_2^+ = 300$$

en donde d_2^- indica el defecto en $ con relación a la meta de 300, y d_2^+ el exceso con respecto a ella.

En este problema, las metas son conmensurables. La meta d_1^- penaliza al funcional con el valor 10 y la meta d_2^- con el valor 1, por lo que se debe minimizar:

$$Z = 10\,d_1^- + d_2^-$$

En resumen, el PL correspondiente a este problema es:

$$\begin{array}{lrl}
\text{MIN:} & 10\,d_1^- + d_2^- & \\
\text{Sujeto a:} & 3\,x_1 + 2\,x_2 & \leq 152 \\
 & x_1 + 5\,x_2 & \leq 160 \\
 & x_2 + d_1^- - d_1^+ & = 22 \\
 & 5\,x_1 + 7\,x_2 + d_2^- - d_2^+ & = 300 \\
\end{array}$$

siendo $x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$

Cargando este problema y resolviendo con LINDO, tendremos:

```
MIN 10 D1MENOS + D2MENOS
ST
3 x1 + 2 x2 < 152
2 x1 + 5 x2 < 160
x2 + D1MENOS - D1MAS = 22
5 x1 + 7 x2 + D2MENOS - D2MAS = 300
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP     3
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 21.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
D1MENOS	0.000000	4.500000
D2MENOS	21.000000	0.000000
X1	25.000000	0.000000
X2	22.000000	0.000000
D1MAS	0.000000	5.500000
D2MAS	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	33.000000	0.000000
3)	0.000000	2.500000
4)	0.000000	-5.500000
5)	0.000000	-1.000000

NO. ITERATIONS = 3

A partir de la lectura del informe de la solución óptima se observa que se alcanza la meta de fabricar 22 unidades de B y que no se alcanza la meta del beneficio de 300 $ por una cantidad de 21$ (el beneficio que se logra es de 300-21= 279$). Hay un sobrante de 33 horas de mano de obra por semana.

Con respecto a las variables duales, su significado no es de relevancia ya que implican modificaciones de valoraciones subjetivas de las metas al activar en una unidad las variables reales o al modificar en una unidad la meta propuesta, restricción o requerimiento. Por consiguiente, no deben considerarse en el sentido que se ha explicado para los problemas de PL convencional.

Ejemplo 6.7:

Supongamos que en el ejemplo 1.1, se mantiene el límite máximo de los recursos de tratamiento térmico en 720 hs y maquinaria en 640 hs, pero se pueden contratar (además de las 480 horas normales) horas extras por mes a un costo adicional (no contemplado en las utilidades unitarias de los productos) de $ 1.5. Se establecen las siguientes prioridades:

a. No contratar más de 100 hs extras por mes.
b. Ocupar a pleno el recurso de tratamiento térmico
c. Maximizar las utilidades.

Como las metas son inconmensurables, se toma un coeficiente del funcional para penalizar al exceso de horas extras mucho mayor que el que castiga al sobrante de TT, que a su vez es mucho mayor que el que afecta a la desviación con respecto a una utilidad suficientemente alta (se toma para este ejemplo, arbitrariamente $ 25.000 por mes).

MIN:	$P1\ d^{+}_{HE} + P2\ d^{-}_{TT} + P3\ d^{-}_{U}$
Sujeto a:	$9\ x_1 + 18\ x_2 + d^{-}_{TT} = 720$
	$16\ x_1 + 8\ x_2 \leq 640$
	$10\ x_1 + 10\ x_2 - HE \leq 480$
	$HE + d^{-}_{HE} - d^{+}_{HE} = 100$
	$400\ x_1 + 300\ x_2 - 1.5\ HE + d^{-}_{U} - d^{+}_{U} = 25000$
con	todas las variables NN y continuas
y siendo	$P1 >> P2 >> P3$

Para resolver el problema se puede tomar por ejemplo

$$P1 = 10000000,\ P2 = 100000\ \text{ y } P3 = 1$$

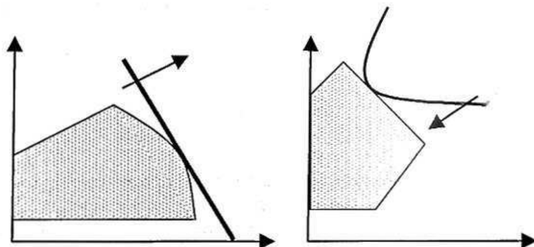
lo que da la siguiente solución:

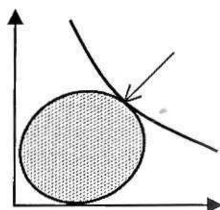
D^{+}_{HE}	0 (se cumple la meta)
D^{-}_{TT}	0 (se cumple la meta)
D^{-}_{U}	6413.33 (no se cumple, pero fue una meta arbitrariamente alta)
X1	26.67
X2	26.67
HE	53.33
D^{-}_{HH}	46.67

6.8 PROGRAMACIÓN NO LINEAL RESUELTA EN EL ENTORNO DE LA PL

Los programas no lineales (PNL) son aquellos en los que algunas o todas las condiciones de vínculo, o el funcional son no lineales. Las regiones de soluciones factibles pueden ser convexas o no convexas.

En los gráficos se muestran algunos casos de problemas no lineales muy simples (con dos variables reales), en donde se ha indicado el sentido de mejora del funcional. En el primero de ellos se tiene un recinto no lineal con un funcional lineal. El segundo es un recinto lineal con un funcional no lineal. Finalmente, el tercer caso se refiere a un problema con recinto y función objetivo no lineales.





Afortunadamente, muchos problemas no lineales se pueden resolver en el contexto de la programación lineal. Dos ejemplos de ello lo constituyen el método denominado de "recurrencia" y la llamada "programación separable".

Programación separable

Esta técnica se puede utilizar cuando la condición de vínculo, o el funcional, es una función separable.

Una función separable es la que se puede expresar como suma de funciones de una variable simple, es decir:

$$f(x_i) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + ... + f_N(x_N)$$

Por ejemplo, las siguientes funciones son separables:

$$x_1^2 + 2x_2 + e^{x_3}$$

$$x_1 + x_2^2 + 3\log x_3$$

y las siguientes son no separables:

$$x_1\, x_2 + x_3.\ \ln x_4$$

$$x_1 - \frac{x_2}{1+x_3} + x_4 + x_4 \cdot e^{-x_3}$$

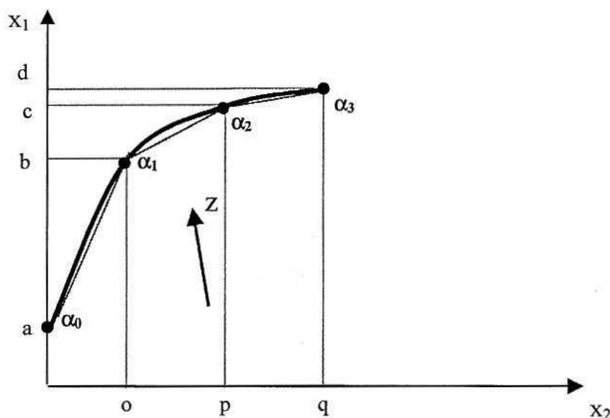
Cabe mencionar que algunas funciones no separables pueden convertirse en separables. Por ejemplo, la función: $x_1\, x_2$ puede convertirse en una función separable haciendo la siguiente transformación:

$$x_1 = p + q$$

$$x_2 = p - q$$

$$x_1\, x_2 = (p + q)\,(p - q) = p^2 - q^2$$

La importancia de las funciones separables en el ámbito de la programación matemática recae en el hecho de que se pueden aproximar mediante porciones de funciones lineales. En el siguiente gráfico vemos una función lineal, aproximada mediante tres porciones lineales (α_0–α_1–α_2–α_3), es decir mediante una poligonal.



Cada punto constituye un vector que pertenece a la curva. Una porción lineal es la combinación lineal de dos vectores (puntos) adyacentes.

En definitiva, estamos representando un modelo aproximado a la realidad mediante la adición de una "red" o "familia" de vectores (o vectores *mesh*). Cualquier punto de la poligonal es una combinación lineal de dos vectores vecinos. Para asegurar la combinación lineal convexa de los vectores α_i se debe agregar la siguiente restricción:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Las variables x_1 y x_2 son funciones lineales de estos vectores:

$$x_1 = a\,\alpha_0 + b\,\alpha_1 + c\,\alpha_2 + d\,\alpha_3$$

$$x_2 = 0\,\alpha_0 + o\,\alpha_1 + p\,\alpha_2 + q\,\alpha_3$$

La aproximación aumenta el tamaño del modelo y su tiempo de resolución, pero dado que se puede utilizar la programación lineal, el método resulta de una significativa importancia en la práctica. Es obvio que cuantos más vectores se consideren, tanto mejor se va a representar la curva, pero tanto más complejo se hará el problema.

La curva queda entonces aproximada con la siguiente formulación lineal (expresada en la forma de cuadro matricial:

x_1	x_2	α_0	α_1	α_2	α_3		
−1		a	b	c	d	=	0
	−1		o	p	q	=	0
		1	1	1	1	=	1

Ejemplo 6.8:

Formular y resolver el siguiente problema como PL:

MIN	$3x_1^2 + 4x_1 + 15x_2$
Sujeto a:	$x_1 + x_2 \geq 4$
	$2x_1 + 0.5x_2 \leq 5$
	$-3x_1 + 2.8x_2 \geq 2$
con:	$x_1, x_2 \geq 0$

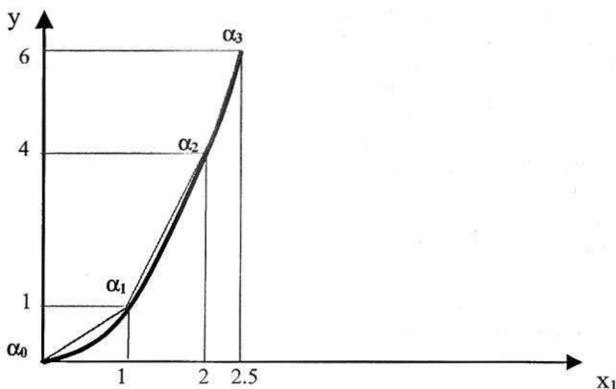
Para formular la parte no lineal del problema hacemos $y = x_1^2$. Aproximaremos la curva con cuatro puntos:

x_1	Y	Vector
0	0	α_0
1	1	α_1
2	4	α_2
2.5	6.25	α_3

La cota superior de la variable x_1 surge de la ecuación 2 en donde se observa que su valor no puede ser superior a 2.5.

El problema queda formulado entonces (usando LINDO):

```
MIN 4 X1 + 15 X2 + 3 Y
ST
X1+X2>4
2X1+0.5 X2<5
-3X1+2.8X2>2
-X1+ALFA1+2ALFA2+2.5ALFA3=0
-Y+ALFA1+4ALFA2+6.25ALFA3=0
ALFA0+ALFA1+ALFA2+ALFA3=1
END
```



cuyo resultado es:

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 50.82759

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	1.586207	0.000000
X2	2.413793	0.000000
Y	2.758621	0.000000
ALFA1	0.413793	0.000000
ALFA2	0.586207	0.000000
ALFA3	0.000000	2.250000
ALFA0	0.000000	6.000000

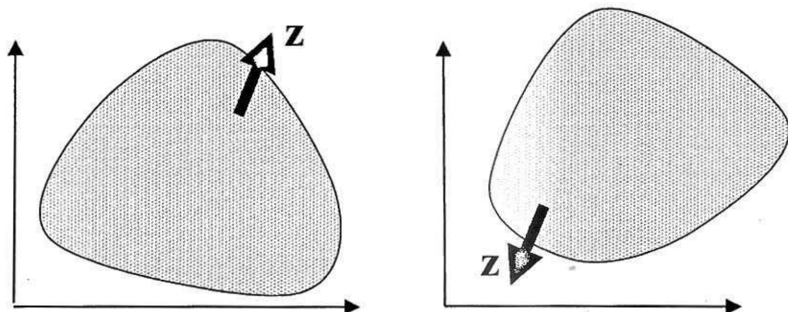
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-14.034483
3)	0.620690	0.000000
4)	0.000000	-0.344828
5)	0.000000	-9.000000
6)	0.000000	3.000000
7)	0.000000	6.000000

Se observa que en la solución óptima del problema es $x_1 = 1.59$ y $x_2 = 2.41$.
El valor de x_1 surge de la combinación lineal de α_1 y α_2. En efecto,

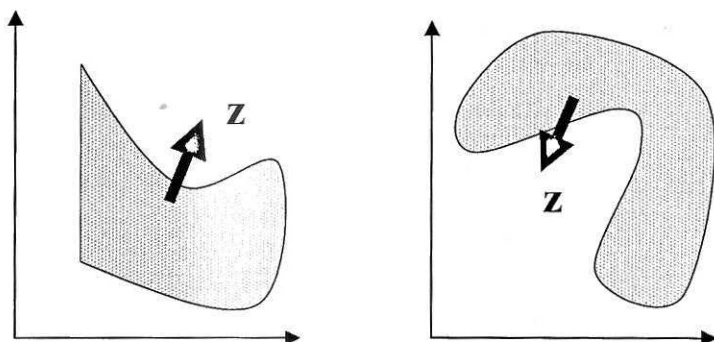
$$x_1 = 1 \,.\, 0.41 + 2 \,.\, 0.59 = 1.59$$

En el ejemplo anterior, el recinto es lineal y el funcional es no lineal.

Cuando el recinto de soluciones factibles es no lineal, el método es aplicable solamente cuando el óptimo se encuentra sobre una función convexa, y ello dependerá del sentido del funcional como se observa en los siguientes gráficos:



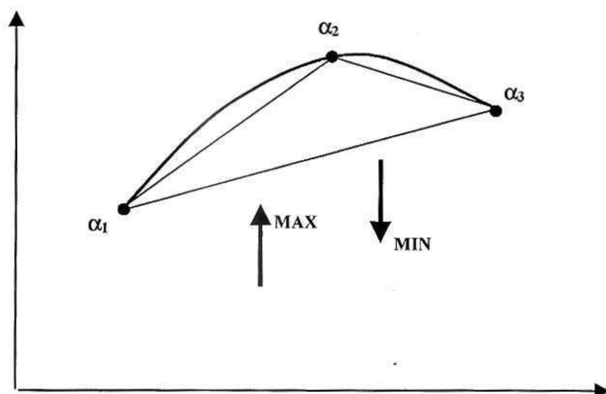
Sin embargo, no se puede aplicar cuando el óptimo se encuentra sobre una función no convexa, como ser:



La razón es la siguiente: Supongamos una curva definida por tres vectores α_1, α_2 y α_3, como se indican en la figura siguiente.

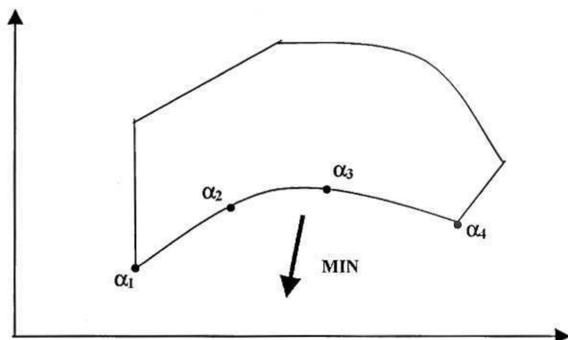
Si se está maximizando, la combinación lineal α_1 con α_3 no es tan buena como la combinación lineal α_1 con α_2 o la de α_2 con α_3. En consecuencia, nunca se van a activar α_1 y α_3.

Si se estuviera minimizando, en cambio, la combinación de α_1 con α_3 sería la mejor solución, pero no describe a la curva y, en consecuencia, podría resultar en una solución no factible (excepto que se active sólo un vector). En consecuencia, si en un problema se activan dos vectores *mesh* no vecinos, la función es no convexa.



Sin embargo, es factible usar el método en funciones cóncavas si se introduce alguna imposición que permita que se den como resultado sólo las combinaciones de vectores *mesh* adyacentes.

Supongamos el siguiente ejemplo:



Se definen variables binarias para permitir que se activen solamente vectores *mesh* vecinos con la siguiente formulación lineal:

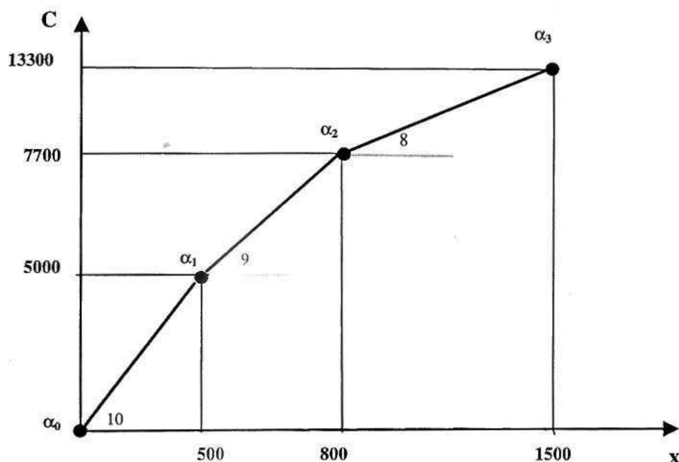
α_1	α_2	α_3	α_4	I_1	I_2	I_3	I_4		RHS
1				–1				≤	0
	1				–1			≤	0
		1				–1		≤	0
			1				–1	≤	0
				1	1	1	1	≤	2
				1		1		≤	1
				1			1	≤	1
					1		1	≤	1

Con esta técnica de generación de familia de vectores también se pueden resolver otros casos lineales dentro de ciertos rangos, como ser los problemas de economía de escala.

Supongamos el siguiente caso:

Una variable x contribuye al funcional de la siguiente manera:

- *con un valor de $10 para las primeras 500 unidades,*
- *con $9 para las siguientes 300 unidades (es decir entre 500 y 800 unidades) y*
- *con $8 para las siguientes 700 unidades (es decir cuando su nivel de actividad está comprendido entre 800 y 1500).*



Para formular el problema se plantean 4 vectores *mesh* de manera que

$$-x + 0\,\alpha_0 + 500\,\alpha_1 + 800\,\alpha_2 + 1500\,\alpha_3 = 0$$

Además:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Finalmente, en el funcional se afectan los vectores *mesh* de la siguiente forma:

$$\text{MAX}: \ldots\ldots\ldots\ldots + 5000\,\alpha_1 + 7700\,\alpha_2 + 13300\,\alpha_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

valores éstos calculados de la siguiente forma:

$$C_1 = 500 \,.\, 10 = 5000$$

$$C_2 = 5000 + 300 \,.\, 9 = 7700 \quad \text{y}$$

$$C_3 = 7700 + 700 \,.\, 8 = 13300$$

NOTA: Este mismo problema se pudo haber calculado con PL convencional como sigue:

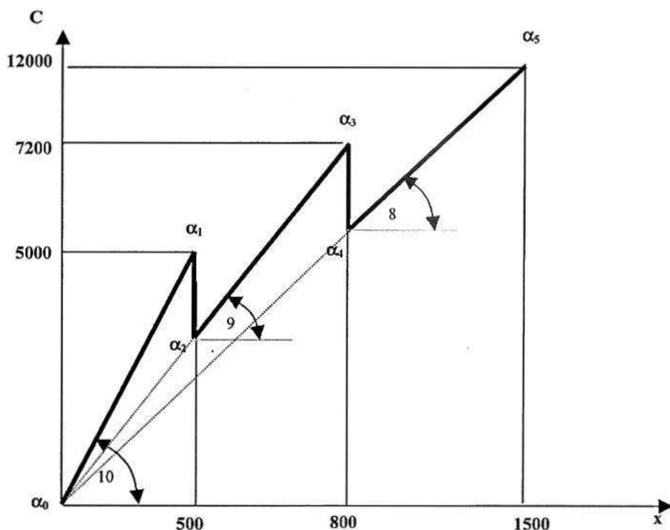
$$x - x' - x'' \leq 500$$
$$x' \leq 300$$
$$x'' \leq 700$$
$$\text{MAX}: \ldots\ldots + 10\,x - 1\,x' - 2\,x''$$

en donde x' es el excedente de x por encima de 500 y x'' es el excedente por encima de 800. Esta formulación es válida solamente para un problema de maximización en donde $c_1 > c_2 > c_3$, pero no se podría plantear si $c_1 < c_2 < c_3$. Del mismo modo, sería válida para un problema de minimización en donde $c_1 < c_2 < c_3$, pero no si $c_1 > c_2 > c_3$.

Otro problema de formulación de variables más común en la práctica como consecuencia de la economía de escala es el que se formula a continuación:

Una variable x contribuye al funcional con un valor \$10 si es menor a 500 unidades, con \$9 si está comprendida entre 500 y 800 unidades y con \$8 si está comprendido entre 800 y 1500.

Tal como se indica en el gráfico, se plantean 6 vectores *mesh* y se formula el problema como sigue:



$$-x + 0\,\alpha_0 + 500\,\alpha_1 + 500\,\alpha_2 + 800\,\alpha_3 + 800\,\alpha_4 + 1500\,\alpha_5 = 0$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \leq 1$$

$$\text{MAX: } \ldots\ldots + 5000\,\alpha_1 + 4500\,\alpha_2 + 7200\,\alpha_3 + 6400\,\alpha_4 + 12000\,\alpha_5 + \ldots\ldots$$

Aproximación sucesiva y recurrencia

Esta técnica permite resolver algunos problemas de programación no lineal, especialmente donde existe un producto de variables (tipo $x_1 \,.\, x_2$), estimando el valor de una de las dos variables y resolviendo un problema lineal. Es decir, se transforma una variable (por ejemplo x_1) en un parámetro. Una vez resuelto el problema se vuelve a estimar un valor diferente de x_1 y se resuelve nuevamente comparando los valores del funcional, y así se repite el proceso aproximando heurísticamente la estimación hasta encontrar una buena aproximación a la solución óptima. Si es posible, se debe formular una expresión de recurrencia, de manera tal que el próximo valor estimado sea consecuencia del valor estimado anterior y del resultado del programa lineal obtenido. De esta forma, se tiene un método bastante eficiente para resolver ciertos casos no lineales.

Un ejemplo práctico se da en el denominado "problema del pooling". En las mezclas de productos en donde se requieren determinados valores de calidad de los componentes, la calidad resultante del producto es a veces una variable, presentándose un problema no lineal. La recurrencia es una técnica utilizada a menudo para este tipo de problemas.

Supongamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.9:

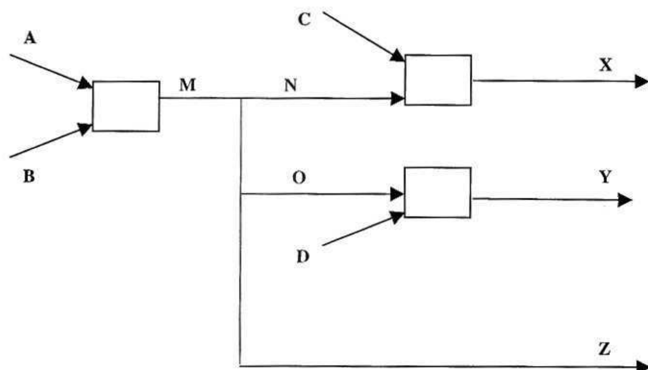
Se mezcla un componente A (calidad 10) con otro B (calidad 4) para formar un producto M (cuya calidad debe ser mayor a 7). Parte de M (llamada aquí N) se mezcla con C (calidad 12) para formar el producto X (cuya calidad debe ser superior a 10) y que se vende a 50$ la unidad. Otra parte de M (llamada aquí O) se mezcla con D (calidad 11) para formar el producto Y (cuya calidad debe ser superior a 9) y que se vende a $45 la unidad. Finalmente, parte del producto M se vende, con el nombre Z, a $25. Los costos por unidad y la disponibilidad en unidades de los componentes son:

A: costo $ 40, disponibilidad 200
B: costo $ 20, disponibilidad 200
C: costo $ 57, disponibilidad 50
D: costo $ 51, disponibilidad 50.

Los requerimientos mínimos y máximos, en unidades, de los productos se indican a continuación:

X: Mínimo 70, máximo 150
Y: Mínimo 80, máximo 200
Z: Mínimo 90, máximo 200.

Formular un problema de PM que permita maximizar la utilidad.



La formulación matemática del modelo será la siguiente:

	A	B	M	N	O	Z	C	D	X	Y		RHS
MAX	-40	-20				25	-57	-51	50	45		
DISPA	1										≤	200
DISPB		1									≤	200
DISPC							1				≤	50
DISPD								1			≤	50
RMI X									1		≥	70
RMIY										1	≥	80
RMIZ						1					≥	90
RMAX									1		≤	150
RMAY										1	≤	200
RMAZ						1					≤	200
BM1	1	1	-1								=	0
BM2			-1	1	1	1					=	0
BX				1			1		-1		=	0
BY					1			1		-1	=	0
QM	10	4	-q								≥	0
QX				q			12		-10		≥	0
QY					q			11		-9	≥	0

Tal como se puede observar en las últimas ecuaciones la calidad del componente M es una variable. Planteando la ecuación QM como una ecuación de igual, es decir:

$$q = \frac{10A + 4B}{M}$$

y asumiendo q = 7 (sabemos que la mezcla debe tener como mínimo ese valor), tendremos que la solución del problema lineal es Z = 316.67.

Incrementamos en un principio q de a 0.5 unidades. Como para el valor q = 7.5 la solución mejora, volvemos a hacer otro incremento de 0.5 (q = 8.0). Nuevamente mejora, por lo que volvemos a resolver para q = 8.5 y luego para q = 9. Como en este caso, la solución es peor, se podría inferir que el óptimo estará entre 8 y 8.5, por lo que se estima ahora para 8.25. Como la solución mejora, se prueba para q = 8.20 y 8.30. Comparando los resultados, se infiere que el óptimo estará entre q = 8.25 y 8.30. Se vuelve a aproximar para q = 8.255 y así sucesivamente como se ve en la tabla siguiente:

q	A	B	FUNC
7	86.67	86.67	317
7.5	114.72	81.94	372
8	160	80	600
8.5	66.67	27.5	685
9	200	40	305
8.25	198.67	81.81	874
8.20	189.39	81.16	804
8.30	200	79.57	847
8.255	199.66	81.88	881.8
8.257	200	81.89	884.2
8.256	199.85	81.89	883.3
8.2565	199.95	81.90	884.1
8.2567	199.99	81.91	884.4
8.2568	200	81.90	884.4

La solución óptima se tiene entonces para q = 8.2568, y el resultado completo es:

Solución óptima encontrada en el paso: 6
Valor objetivo: 884.4145

Variable	Valor	C. Reducido
X	107.3658	0.0000000
Y	184.5298	0.0000000
Z	90.00000	0.0000000
A	200.0000	0.0000000
B	81.90190	0.0000000
D	49.99363	0.0000000
C	50.00000	0.0000000
M	281.9019	0.0000000
N	57.36576	0.0000000
O	134.5361	0.0000000

CAPÍTULO 7

CASOS

PROBLEMA No. 01
INDUSTRIA: PINTURAS
SECTOR: FABRICACIÓN
OBJETO: PROGRAMACIÓN DE PRODUCCIÓN

Una empresa ha ganado una propuesta para pintar sendas peatonales y carriles de circulación de automóviles para la ciudad de Buenos Aires. Las bases exigen que la pintura tenga una luminosidad de por lo menos 300 UL y una reflexión nocturna de, como mínimo, 250 UR. La empresa dispone de tres concentrados A, B y C para preparar la pintura P1 para este destino. Cada unidad de concentrado de A entrega 1000 UL y 300 UR. Por su parte, el concentrado B aporta 100 UL y 800 UR por unidad. Finalmente, el concentrado C proporciona sólo 900 UL.

Por otra parte, debe elaborar sus pinturas tradicionales P2 (que tiene un 30% de A y un 70% de C), y la P3 (que debe tener por lo menos un 20% de A y no más de un 70% de B).

En la siguiente tabla se indican las disponibilidades semanales de cada concentrado y el costo por tonelada:

	A	B	C
Disponibilidad (tn)	40	60	80
Costo (k$/tn)	13	9	11

Los concentrados se mezclan en una amasadora en donde se produce una pasta, que es sometida a un proceso de refinación.

Los tiempos requeridos en cada uno de estos procesos, la disponibilidad de tiempo para cada operación por semana, y el costo operativo de procesamiento se indican a continuación:

Proceso	**Tiempos requeridos (hs/tn)**			**Disponibilidad (hs/semana)**	**Costo (k$/tn)**
	P1	P2	P3		
Amasadora	10	8	13	130	0.8
Refinación	12	11	7	130	0.3

A la pasta refinada se le incorpora luego el diluyente, y finalmente se filtra para eliminar impurezas. La relación porcentual refinado/diluyente es de 70/30, 80/20 y 75/25 para P1, P2 y P3, respectivamente. El costo del diluyente es de 1 k$ la tonelada.

El proceso de filtrado tiene una capacidad semanal de 10 tn. Como resultado de esta operación se extrae un 3% en peso de impurezas.

La última operación es la de envasado. La velocidad de envasado es de 0.25 toneladas por hora para P1 y de 0.2 para P2 y P3. La envasadora está disponible 168 horas por semana.

El tiempo de preparación de la envasadora para cada tipo de pintura es de 4 hs. Durante este tiempo la máquina no está disponible. El costo de envasado es de 0.1 k$ por hora de operación y de 1 k$ por cada preparación.

El precio de venta de los productos es de 30 k$/tn, 27 k$/tn y 25 k$/tn para P1, P2 y P3, respectivamente. Se deben entregar 3 tn de pintura P1 por semana a la municipalidad de la ciudad.

Formular y resolver un modelo matemático para optimizar el problema.

Resolución

Definición de variables:

#: cantidad semanal a procesar de concentrado # (A, B y C)

#i: cantidad semanal de concentrado # que se mezcla para formar la pintura i (1,2,3)

Mi: cantidad semanal de pasta de pintura i que se amasa y refina

M: cantidad total de pasta que se amasa y refina por semana

Fi: cantidad semanal de pintura i que se filtra

F: cantidad total de pintura que se filtra por semana

Pi: cantidad semanal de pintura i que se fabrica y vende

TE: tiempo de operación de la envasadora, en horas por semana

Ii: variable binaria para determinar si se produce o no la pintura i en la semana

E: cantidad de pinturas diferentes a fabricar en la semana

Formulación:

- Funcional

MAX 30 P1 + 27 P2 + 25 P3 - 13 A - 9 B - 11 C - 1.1 M - 1 D - 0.1 TE - 1 E

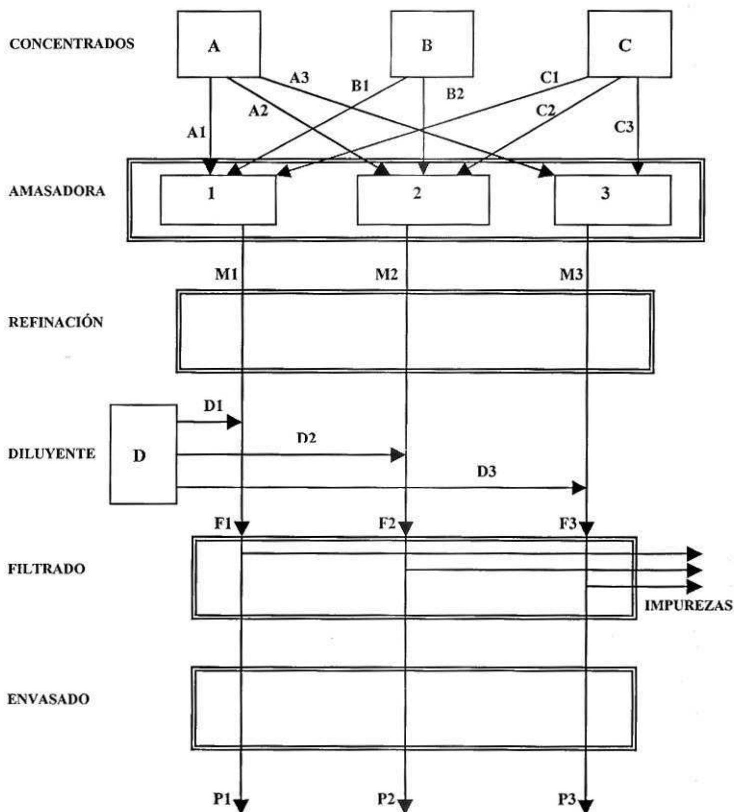
Sujeto a

- Balance de concentrados

BA) - A + A1 + A2 + A3 = 0
BB) - B + B1 + B2 + B3 = 0
BC) - C + C1 + C2 + C3 = 0

- Restricción de disponibilidades

DA) $A \leq 40$
DB) $B \leq 60$
DC) $C \leq 80$



Restricciones de mezcla de la pintura 1

BM1) $A1 + B1 + C1 - M1 = 0$

LUM) $1000\ A1 + 100\ B1 + 900\ C1 - 300\ M1 \geq 0$

REF) $300\ A1 + 800\ B1 - 250\ M1 \geq 0$

- Restricciones de mezcla de la pintura 2

BA2) $A2 - 0.3\ M2 = 0$

BC2) $B2 - 0.7\ M2 = 0$

- Restricciones de mezcla de la pintura 3

BM3) $A3 + B3 + C3 - M3 = 0$

RA3) $A3 - 0.2\ M3 \geq 0$

RB3) $B3 - 0.7\ M3 \leq 0$

- Restricciones de pasta en amasadora y refinadora

BM) $-M + M1 + M2 + M3 = 0$
DAM) $10\ M1 + 8\ M2 + 13\ M3 \leq 130$
DRE) $12\ M1 + 11\ M2 + 7\ M3 \leq 130$

- Restricciones de pintura diluida a filtrar

BF1) $M1 - 0.7\ F1 = 0$
BF2) $M2 - 0.8\ F2 = 0$
BF3) $M3 - 0.75\ F3 = 0$

BD1) $-F1 + M1 + D1 = 0$
BD2) $-F2 + M2 + D2 = 0$
BD3) $-F3 + M3 + D3 = 0$

BF) $-F + F1 + F2 + F3 = 0$
BD) $-D + D1 + D2 + D3 = 0$

RMF) $F \leq 10$

- Restricciones de pintura terminada a envasar. Para definir las variables binarias Ii se toma un valor M, arbitrariamente alto (en este caso M = 50)

BP1) $-0.97\ F1 + P1 = 0$
BP2) $-0.97\ F2 + P2 = 0$
BP3) $-0.97\ F3 + P3 = 0$

IP1) $P1 - 50\ I1 \leq 0$
IP2) $P2 - 50\ I2 \leq 0$
IP3) $P3 - 50\ I3 \leq 0$

BE) $-E + I1 + I2 + I3 = 0$

- Restricciones de envasado (los coeficientes que afecta a las variables P1, P2 y P3 son 1/0.25; 1/0.20; y 1/0.20, respectivamente)

UEN) $4\ P1 + 5\ P2 + 5\ P3 - TE = 0$
DEN) $TE + 4\ E \leq 168$

- Restricciones de requerimiento de pintura 1

RP1) $P1 = 3$

- Condiciones de las variables:

I1, I2 e I3: binarias.

El resto: no negativas.

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
 1)      176.6510
```

VARIABLE	VALOR	C.OPORTUNIDAD
I1	1.000000	1.000000
I2	1.000000	1.000000
I3	0.000000	1.000000
P1	3.000000	0.000000
P2	6.700000	0.000000
P3	0.000000	0.000000
A	1.657732	0.000000
B	5.491753	0.000000
C	0.541237	0.000000
M	7.690722	0.000000
D	2.309278	0.000000
TE	45.500000	0.000000
E	2.000000	0.000000
A1	0.000000	1.750000
A2	1.657732	0.000000
A3	0.000000	0.000000
B1	1.623711	0.000000
B2	3.868041	0.000000
B3	0.000000	2.428571
C1	0.541237	0.000000
C2	0.000000	11.000000
C3	0.000000	0.000000
M1	2.164948	0.000000
M2	5.525773	0.000000
M3	0.000000	0.000000
F1	3.092783	0.000000
F2	6.907217	0.000000
F3	0.000000	0.000000
D1	0.927835	0.000000
D2	1.381443	0.000000
D3	0.000000	0.000000
F	10.000000	0.000000

FILA	SLACK	V. MARGINAL
BA)	0.000000	13.000000
BB)	0.000000	9.000000
BC)	0.000000	11.000000
DA)	38.342270	0.000000
DB)	54.508247	0.000000
DC)	79.458763	0.000000
BM1)	0.000000	-8.750000
LUM)	0.000000	-0.002500
REF)	757.731934	0.000000
BA2)	0.000000	-13.000000
BC2)	0.000000	-9.000000
BM3)	0.000000	-11.000000
RA3)	0.000000	-2.000000
RB3)	0.000000	4.428571
BM)	0.000000	1.100000
DAM)	64.144333	0.000000
DRE)	43.237114	0.000000
BF1)	0.000000	-9.600000
BF2)	0.000000	-10.300000
BF3)	0.000000	-8.400000
BD1)	0.000000	-1.000000
BD2)	0.000000	-1.000000
BD3)	0.000000	-1.000000

```
        BF)          0.000000          16.465000
        BD)          0.000000           1.000000
       RMF)          0.000000          16.465000
       BP1)          0.000000          24.932989
       BP2)          0.000000          26.500000
       BP3)          0.000000          24.500000
       IP1)         47.000000           0.000000
       IP2)         43.299999           0.000000
       IP3)          0.000000           0.000000
        BE)          0.000000           1.000000
       UEN)          0.000000           0.100000
       DEN)        114.500000           0.000000
       RP1)          0.000000           4.667010

NO. DE ITERACIONES =   38
```

PROBLEMA No. 02
INDUSTRIA: CONSULTORÍA
SECTOR: INVERSIONES
OBJETO: SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS

Un grupo de inversores está estudiando la posibilidad de realizar algunas inversiones en un país en desarrollo. En la actualidad puede elegir entre 10 proyectos que difieren en el rendimiento neto y en la inversión de capital que necesitan, según la siguiente tabla (en M$)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rendimiento neto	4	6	5	8	7	6	3	5	4	2
Inversión 1er. año	6	6	4	7	5	6	3	5	3	2
Inversión 2do. año	20	20	10	30	10	40	20	30	25	5

El capital total disponible para afrontar estas inversiones es de 40 M$ en el primer año y 150 M$ en el segundo.

Existen un conjunto de restricciones impuestas por las autoridades del país, según las cuales los proyectos 3, 4 y 7 son incompatibles; el proyecto 6 debe elegirse si se elige el 3; el proyecto 8 debe elegirse si se eligen el 1 ó el 2; el proyecto 4 es complementario del 10 (es decir se aceptan o se rechazan conjuntamente).

Formular un modelo matemático que permita maximizar el rendimiento y resolver.

Resolución

Definición de variables:

I_i: variables binarias que se activan cuando se elige el proyecto i.

Formulación:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	Signo	RHS
4	6	5	8	7	6	3	5	4	2	MAX	
6	6	4	7	5	6	3	5	3	2	≤	40
20	20	10	30	10	40	20	30	25	5	≤	150
		1	1			1				≤	1
		-1			1					≥	0
-1	-1						2			≥	0
			1						-1	=	0

Solución:

I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8	I_9	I_{10}	RENDIMIENTO
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	36 $M

PROBLEMA No. 03
INDUSTRIA: SERVICIOS ELÉCTRICOS
SECTOR: PRODUCCIÓN
OBJETO: PROGRAMACIÓN

Una compañía de servicios eléctricos, que cuenta con tres generadores, debe decidir qué generadores debe poner en marcha cada día. Por razones operativas y de consumo, el día está dividido en tres períodos. Un generador puesto en marcha en un período se puede usar en un período subsiguiente del mismo día sin incurrir en costo adicional de puesta en marcha. Todos los generadores se apagan al finalizar el día.

	GENERADOR		
	A	**B**	**C**
Costo Fijo de arranque (K$)	4	3	2
Costo por MW ($)	6	5	8
Capacidad Máxima por período (MW)	2300	2000	3300

El régimen operativo de los generadores A, B y C requiere que trabajen a una capacidad superior a 400 MW, 300 MW y 500 MW, respectivamente.

Formular y resolver el problema para un día determinado en donde la demanda es de 2500 MW, 1800 MW y 3500 MW para el primer, segundo y tercer período respectivamente.

Resolución

Definición de variables:

#i: Cantidad de electricidad en MW producida por el generador # (A,B o C) en el período i del día.

I#: Variable binaria que se activa si en un día determinado se enciende un generador.

Formulación:

- Función objetivo:

MIN Z) 4000 IA + 3000 IB + 2000 IC + 6 A1 + 6 A2 + 6 A3 + 5 B1 + 5 B2 +5 B3 + 8 C1 + 8 C2 + 8 C3

Sujeto a:

- Requerimiento:

R1) A1 + B1 + C1 = 2500
R2) A2 + B2 + C2 = 1800
R3) A3 + B3 + C3 = 3500

- Capacidad

CA1) $A1 - 2300\ IA \leq 0$
CA2) $A2 - 2300\ IA \leq 0$
CA3) $A3 - 2300\ IA \leq 0$

CB1) $B1 - 2000\ IB \leq 0$
CB2) $B2 - 2000\ IB \leq 0$
CB3) $B3 - 2000\ IB \leq 0$

CC1) $C1 - 3300\ IC \leq 0$
CC2) $C2 - 3300\ IC \leq 0$
CC3) $C3 - 3300\ IC \leq 0$

- Generación mínima:

NA1) $A1 - 400\ IA \geq 0$
NA2) $A2 - 400\ IA \geq 0$
NA3) $A3 - 400\ IA \geq 0$

NB1) $B1 - 300\ IB \geq 0$
NB2) $B2 - 300\ IB \geq 0$
NB3) $B3 - 300\ IB \geq 0$

NC1) $C1 - 500\ IC \geq 0$
NC2) $C2 - 500\ IC \geq 0$
NC3) $C3 - 500\ IC \geq 0$

- Condiciones de las variables:

#i no negativas
I# son binarias

Solución:

```
          VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z)       50900.00
```

VARIABLE	VALOR	C.REDUCIDO
IA	1	4400
IB	1	-1000
IC	0	3000
A1	500	0
A2	400	0
A3	1500	0
B1	2000	0
B2	1900	0
B3	2000	0
C1	0	2
C2	0	3
C3	0	0

RESTRICCION	SLACK	P.SOMBRA
R1)	0	-6
R2)	0	-5

```
      R3)         0           -6
     CA1)      1800            0
     CA2)      1900            0
     CA3)       800            0
     CB1)         0            1
     CB2)       100            0
     CB3)         0            1
     CC1)         0            0
     CC2)         0            0
     CC3)         0            0
     NA1)       100            0
     NA2)         0           -1
     NA3)      1100            0
     NB1)      1700            0
     NB2)      1600            0
     NB3)      1700            0
     NC1)         0            0
     NC2)         0            0
     NC3)         0           -2
```

PROBLEMA No. 04
INDUSTRIA: PETRÓLEO
SECTOR: PLANEAMIENTO
OBJETO: MEZCLA

Una empresa petrolera, elabora naftas normal y extra mezclando tres componentes distintos. La empresa pretende determinar cómo mezclar o combinar los tres componentes para obtener las dos naftas de manera que se maximicen las utilidades.

Los datos disponibles muestran que la nafta común se puede vender en $ 0.90 por litro y la extra en $ 1.10. Para el período en curso de planeamiento la petrolera puede obtener los tres componentes en las cantidades y a los costos por litro indicados siguientes:

COMPONENTE	**$/litro**	**Disponibilidad**
1	0.30	50000
2	0.35	100000
3	0.49	100000

Las especificaciones siguientes restringen las cantidades de cada componente que se pueden utilizar en cada nafta:

Nafta común: *No más de un 40 % del componente 1*
Por lo menos un 30 % del componente 2
Por lo menos un 20 % del componente 3

Nafta extra: *No más de un 25 % del componente 1*
No más de un 40 % del componente 2
Por lo menos un 35 % del componente 3

Los compromisos actuales con las estaciones de servicio requieren que la empresa elabore por lo menos 100000 litros de nafta común.

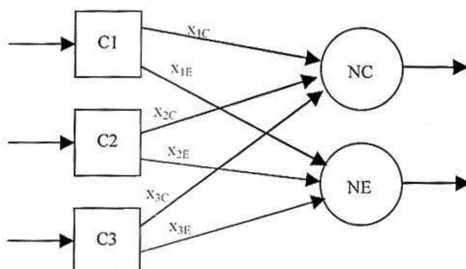
1. *Formular un modelo de PL para optimizar el problema y resolver.*
2. *Convendría comprar 10000 litros de nafta común a 0.9$ el litro a una empresa de la competencia a fin de satisfacer el requerimiento mínimo establecido?. En tal caso, cuál sería el monto máximo que se podría pagar por encima de 0.9$?*

Resolución

Definición de variables:

Xij: Cantidad de componente i (1,2,3) a enviar a la mezcla de cada tipo de nafta j (C, E)

Diagrama del proceso:



Formulación:

- Función objetivo:

  MAX Z) 0.9 NC + 1.1 NE – 0.3 C1 – 0.35 C2 – 0.49 C3

Sujeto a:

- Balance de componentes:

  BC1) – C1 + X1C + X1E = 0
  BC2) – C2 + X2C + X2E = 0
  BC3) – C3 + X3C + X3E = 0

- Balance de naftas:

  BNC) – NC + X1C + X2C + X3C = 0
  BNE) – NE + X1E + X2E + X3E = 0

- Restricciones de las mezclas:

  R1N) X1N – 0.4 NC ≤ 0
  R2N) X2N – 0.3 NC ≥ 0
  R3N) X3N – 0.2 NC ≥ 0
  R1E) X1E – 0.25 NE ≤ 0
  R2E) X2E – 0.4 NE ≤ 0
  R3E) X3E – 0.35 NE ≥ 0

- Requerimiento mínimo de nafta común:

  RNC) NC ≥ 100000

- Disponibilidades de componentes:

  DC1) C1 ≤ 50000

DC2) $C2 \leq 100000$
DC3) $C3 \leq 100000$

Solución:

VALOR DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Z) 156000.0

VARIABLE	VALOR	C.O.
NC	100000	0
NE	150000	0
C1	50000	0
C2	100000	0
C3	100000	0
X1C	12500	0
X1E	37500	0
X2C	87500	0
X2E	12500	0
X3C	0	0
X3E	100000	0
X1N	0	0
X2N	30000	0
X3N	20000	0

RESTR.	VALOR	V.MARGINAL
BC1)	0	1.10
BC2)	0	1.10
BC3)	0	1.10
BNC)	0	-1.10
BNE)	0	-1.10
R1N)	40000	0
R2N)	0	0
R3N)	0	0
R1E)	0	0
R2E)	47500	0
R3E)	47500	0
RNC)	0	0.20
DC1)	0	0.80
DC2)	0	0.75
DC3)	0	0.61

Para responder a la segunda pregunta se lleva a cabo un análisis de sensibilidad, cuyo resultado es el indicado:

RANGO DE VARIACIÓN DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA:

1. RANGOS DE COEFICIENTES DEL FUNCIONAL

VARIABLE	VALOR COEF.	INCREMENTO PERMISIBLE	DECREMENTO PERMISIBLE
NC	0.90	0.20	INFINITO
NE	1.10	INFINITO	0.20
C1	-0.30	INFINITO	0.80
C2	-0.35	INFINITO	0.75
C3	-0.49	INFINITO	0.61
X1C	0	0	1.066667
X1E	0	INFINITO	0

X2C	0	0.27	0
X2E	0	0	0.266667
X3C	0	0	INFINITO
X3E	0	INFINITO	0
X1N	0	0	INFINITO
X2N	0	0	INFINITO
X3N	0	0	INFINITO

2. RANGOS DE VALIDEZ DE LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES

RESTRICC.	VALOR RHS	INCREMENTO PERMISIBLE	DECREMENTO PERMISIBLE
COMP1	0	116666.66	16666.67
COMP2	0	50000.00	16666.67
COMP3	0	50000.00	73076.92
NFCOM	0	16666.67	50000.00
NFEXT	0	73076.92	50000.00
R1N	0	INFINITO	40000.00
R2N	0	INFINITO	30000.00
R3N	0	INFINITO	20000.00
R1E	0	12500.00	37500.00
R2E	0	INFINITO	47500.00
R3E	0	47500.00	INFINITO
RNC	100000	16666.67	50000.00
DC1	50000	116666.66	16666.67
DC2	100000	50000.00	16666.67
DC3	100000	50000.00	73076.92

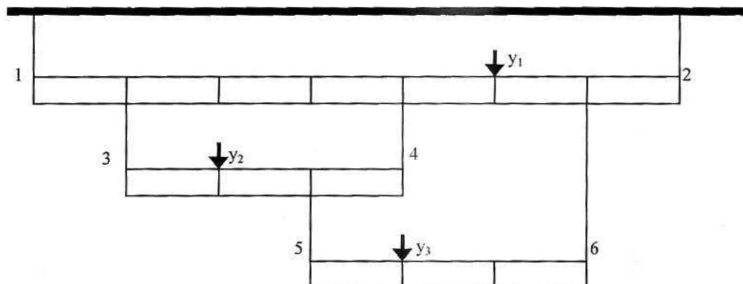
Se observa que la solución óptima se mantiene para el requerimiento mínimo de nafta común (RNC) comprendido entre (100000 – 16666.67) y (100000 + 50000), es decir entre 83333.33 y 150000. En nuestro ejemplo, reducir 10000 litros no modifica el valor marginal de la restricción (RNC) de 0.20.

La empresa petrolera podría evaluar comprar nafta común a la competencia para satisfacer su demanda. Si el precio de adquisición es menor a 0.90 $/litro, es obvio que conviene hacerlo. Pero aún convendría pagar hasta (0.90 + 0.20) $/litro, es decir 1.10 $/litro por los 10000 litros, ya que al producir 90000 litros de nafta común el funcional aumentaría en $2.000.

PROBLEMA No. 05
INDUSTRIA: CONSTRUCCIÓN
SECTOR: INGENIERÍA
OBJETO: CÁLCULO

Considere el sistema de andamios mostrado en la figura. Los cables 1 y 2 pueden soportar 300 Kg cada uno; los 3 y 4 pueden soportar 120 Kg c/u; los cables 5 y 6 no soportan más de 60 Kg c/u.

Despreciando el peso de los tablones y de los cables y suponiendo que los pesos se colocan sólo donde se indica, formular un programa para encontrar el peso máximo total $y_1+y_2+y_3$ *que se puede soportar.*



Resolución

Definición de variables:

y_i: Peso.

x_i: Variables generadas para denotar la tensión en cada cable.

Formulación:

Como se ve en la siguiente formulación del sistema de inecuaciones presentada en la forma de matriz extendida, para cada andamio se deben formular dos ecuaciones (una de balance de fuerzas y otra de momento, o dos de momento).

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		RHS
Z)	1	1	1								MAX
2)			-1					1	1	=	0
3)			1						-3	=	0
4)		-1				1	1	-1		=	0
5)		1					-3	2		=	0
6)	-1			1	1	-1	-1		-1	=	0
7)	5		1		-7		4			=	0
8)				1						≤	300
9)					1					≤	300
10)						1				≤	120
11)							1			≤	120
12)								1		≤	60
13)									1	≤	60
	NN	NN	NN	NN	NN	NN	NN	NN	NN		

Solución:

```
        VALOR DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Z)     384.00

   VARIABLE          VALOR       COSTO OP.

        Y1          204.00            0.00
```

```
        Y2          180.00          0.00
        Y3            0.00          0.27
        X5            0.00          0.00
        X6            0.00          0.00
        X3          120.00          0.00
        X4           60.00          0.00
        X1          300.00          0.00
        X2           84.00          0.00

   RESTRICC.      SOBRANTE O       VALOR
                  EXCEDENTE       MARGINAL

         2)            0.00         -1.60
         3)            0.00         -0.53
         4)            0.00         -3.20
         5)            0.00         -0.80
         6)            0.00          0.00
         7)            0.00          0.20
         8)            0.00          0.00
         9)          216.00          0.00
        10)            0.00          3.20
        11)           60.00          0.00
        12)           60.00          0.00
        13)           60.00          0.00

   No. de iteraciones  =  8
```

La estructura soporta un peso máximo de 384 Kg, colocando un peso de 204 Kg en y_1 y de 180 Kg en y_2.

La solución óptima indica que no debe agregarse ningún peso en y_3. Por cada Kilogramo que se agregara en ese lugar, la estructura soportaría 0.27 Kg menos.

El único cable que trabajaría en su máxima resistencia sería el cable 3).

El valor marginal de la restricción 10) indica que si el cable 3 pudiera soportar 1 Kg más, el sistema aguantaría 3.2 Kg Adicionales.

PROBLEMA No. 06
INDUSTRIA: GENERAL
SECTOR: LOGÍSTICA
OBJETO: DISTRIBUCIÓN

Cinco fábricas envían sus productos a seis centros de distribución. Las capacidades de las fábricas y los costos de producción por unidad de producto en cada una de ellas se indican en la tabla siguiente:

Fábrica	Capacidad	Costo ($/unidad)
1	390	60
2	460	72
3	360	48
4	420	60

Los costos de transporte de cada fábrica a cada almacén en $/u, y las cantidades de unidades requeridas en ellos, son:

Fábrica	Almacenes ($/u)					
	1	2	3	4	5	6
1	28	40	36	38	30	45
2	18	28	24	30	35	20
3	42	54	52	54	49	40
4	36	48	40	46	45	45
Requerimientos (u)	180	280	150	200	170	180

1. *Establecer el programa de distribución que minimice el costo total.*
2. *Cómo se modificaría el programa si se agregan los siguientes costos fijos de las fábricas: 15000, 10000, 8000 y 5000 para 1, 2, 3 y 4, respectivamente.*
3. *Cómo se modificaría el programa del punto 2 si se agregan las siguientes consideraciones:*

   a. *El precio de venta del producto es $200 por unidad*
   b. *La empresa debe cerrar un almacén.*

Resolución

Definición de variables:

Fi: Cantidad de unidades a producir en la fábrica i.

xij: Cantidad de unidades a transportar desde la fábrica i al almacén j.

Aj: Cantidad de unidades a entregar al almacén j

B#i: Balance fábrica o almacén i (para # = F o A)

DFi: Capacidad disponible en la fábrica i

RAj: Requerimiento en el almacén j.

Formulación:

- Función objetivo:

Z) MIN 60 F1 + 72 F2 + 48 F3 + 60 F4 +
28 x11 + 40 x12 + 36 x13 + 38 x14 + 30 x15 + 45 x16 +
18 x21 + 28 x22 + 24 x23 + 30 x24 + 35 x25 + 20 x26 +
42 x31 + 54 x32 + 52 x33 + 54 x34 + 49 x35 + 40 x36 +
36 x41 + 48 x42 + 40 x43 + 46 x44 + 45 x45 + 45 x46

Sujeto a:

- Balance de Fábricas:

BF1) - F1 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 = 0
BF2) - F2 + x21 + x22 + x23 + x24 + x25 + x26 = 0
BF3) - F3 + x31 + x32 + x33 + x34 + x35 + x36 = 0
BF4) - F4 + x41 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 = 0

- Capacidad de Fábricas:

DF1) F1 $\leq$ 390

DF2) $F2 \leq 460$
DF3) $F3 \leq 360$
DF4) $F4 \leq 420$

- Balance de Almacenes:

BA1) $- A1 + x11 + x21 + x31 + x41 = 0$
BA2) $- A2 + x12 + x22 + x32 + x42 = 0$
BA3) $- A3 + x13 + x23 + x33 + x43 = 0$
BA4) $- A4 + x14 + x24 + x34 + x44 = 0$
BA5) $- A5 + x15 + x25 + x35 + x45 = 0$
BA6) $- A6 + x16 + x26 + x36 + x46 = 0$

- Requerimiento de Almacenes:

RA1) $A1 = 180$
RA2) $A2 = 280$
RA3) $A3 = 150$
RA4) $A4 = 200$
RA5) $A5 = 170$
RA6) $A6 = 180$

Solución:

```
        VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
Z)      109300
```

SOLUCIÓN: DISTRIBUCIÓN ÓPTIMA DE UNIDADES							
FÁBRICAS	**ALMACENES**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**TOTAL**
1	20			200	170		390
2		280	150				430
3	160					180	340
4							0
TOTAL	180	280	150	200	170	180	

Como se puede observar, conviene mantener cerrada la fábrica 4.

Si se agregan los costos fijos de las fábricas, el nuevo programa matemático será el siguiente:

Z) MIN $60\,F1 + 72\,F2 + 48\,F3 + 60\,F4 +$
$28\,x11 + 40\,x12 + 36\,x13 + 38\,x14 + 30\,x15 + 45\,x16 +$
$18\,x21 + 28\,x22 + 24\,x23 + 30\,x24 + 35\,x25 + 20\,x26 +$
$42\,x31 + 54\,x32 + 52\,x33 + 54\,x34 + 49\,x35 + 40\,x36 +$
$36\,x41 + 48\,x42 + 40\,x43 + 46\,x44 + 45\,x45 + 45\,x46 +$
$15000\,I1 + 10000\,I2 + 8000\,I3 + 5000\,I4$

Sujeto a:

BF1) $- F1 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 = 0$
BF2) $- F2 + x21 + x22 + x23 + x24 + x25 + x26 = 0$
BF3) $- F3 + x31 + x32 + x33 + x34 + x35 + x36 = 0$

$BF4)\ - F4 + x41 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 = 0$

$DF1)\ F1 - 390\ I1 \leq 0$
$DF2)\ F2 - 460\ I2 \leq 0$
$DF3)\ F3 - 360\ I3 \leq 0$
$DF4)\ F4 - 420\ I4 \leq 0$

$BA1)\ - A1 + x11 + x21 + x31 + x41 = 0$
$BA2)\ - A2 + x12 + x22 + x32 + x42 = 0$
$BA3)\ - A3 + x13 + x23 + x33 + x43 = 0$

$BA4)\ - A4 + x14 + x24 + x34 + x44 = 0$
$BA5)\ - A5 + x15 + x25 + x35 + x45 = 0$
$BA6)\ - A6 + x16 + x26 + x36 + x46 = 0$

$RA1)\ A1 = 180$
$RA2)\ A2 = 280$
$RA3)\ A3 = 150$
$RA4)\ A4 = 200$
$RA5)\ A5 = 170$
$RA6)\ A6 = 180$

Siendo Ii como variables enteras binarias.

Solución:

```
        VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO:
Z)   126520
```

DISTRIBUCIÓN ÓPTIMA DE UNIDADES							
FÁBRICAS	ALMACENES						
	1	2	3	4	5	6	TOTAL
1		220			170		390
2							0
3	120	60				180	360
4	60		150	200			410
TOTAL	180	280	150	200	170	180	

Finalmente, para formular el problema de la tercera pregunta, el funcional se debe transformar a un problema de maximización y se deben agregar variables binarias Ei para afectar a las variables continuas Ai.

$$
\begin{aligned}
\text{MAX } Z)\ & 200\ A - 60\ F1 - 72\ F2 - 48\ F3 - 60\ F4 \\
& - 28\ x11 - 40\ x12 - 36\ x13 - 38\ x14 - 30\ x15 - 45\ x16 \\
& - 18\ x21 - 28\ x22 - 24\ x23 - 30\ x24 - 35\ x25 - 20\ x26 \\
& - 42\ x31 - 54\ x32 - 52\ x33 - 54\ x34 - 49\ x35 - 40\ x36 \\
& - 36\ x41 - 48\ x42 - 40\ x43 - 46\ x44 - 45\ x45 - 45\ x46 \\
& - 1500\ I1 - 10000\ I2 - 8000\ I3 - 5000\ I4
\end{aligned}
$$

Sujeto a:

$BF1)\ - F1 + x11 + x12 + x13 + x14 + x15 + x16 = 0$
$BF2)\ - F2 + x21 + x22 + x23 + x24 + x25 + x26 = 0$

$BF3)\ - F3 + x31 + x32 + x33 + x34 + x35 + x36 = 0$

BF4) $- F4 + x41 + x42 + x43 + x44 + x45 + x46 = 0$

DF1) $F1 - 390\, I1 \leq 0$
DF2) $F2 - 460\, I2 \leq 0$
DF3) $F3 - 360\, I3 \leq 0$
DF4) $F4 - 420\, I4 \leq 0$

BA1) $- A1 + x11 + x21 + x31 + x41 = 0$
BA2) $- A2 + x12 + x22 + x32 + x42 = 0$
BA3) $- A3 + x13 + x23 + x33 + x43 = 0$
BA4) $- A4 + x14 + x24 + x34 + x44 = 0$
BA5) $- A5 + x15 + x25 + x35 + x45 = 0$
BA6) $- A6 + x16 + x26 + x36 + x46 = 0$

RA1) $A1 - 180\, E1 = 0$
RA2) $A2 - 280\, E2 = 0$
RA3) $A3 - 150\, E3 = 0$
RA4) $A4 - 200\, E4 = 0$
RA5) $A5 - 170\, E5 = 0$
RA6) $A6 - 180\, E6 = 0$

RMA) $E1 + E2 + E3 + E4 + E5 + E6 \leq 5$

TOTA) $- A + A1 + A2 + A3 + A4 = 0$

siendo Ii y Ei enteras binarias.

Solución:

```
        VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
Z)      90480
```

DISTRIBUCIÓN ÓPTIMA DE UNIDADES							
FABRICAS	ALMACENES						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**TOTAL**
1	180	40			170		390
2							0
3		180				180	360
4		60		200			260
TOTAL	180	280	0	200	170	180	

Como resultado de la política de no tener más de 5 almacenes, debería cerrarse el almacén 3. En este caso, no convendría mantener activa la Fábrica 2.

→ PROBLEMA No. 07
INDUSTRIA: MANUFACTURA
SECTOR: PRODUCCIÓN
OBJETO: EQUILIBRIO DE LÍNEA

Se deben procesar 5 piezas A, B, C, D y E ya sea en la máquina 1 o en la máquina 2. Los tiempos que requiere el procesamiento de cada pieza (expresado en horas) en ambas máquinas es el siguiente:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Máquina I	*3*	*4*	*7*	*5*	*4*
Máquina II	*5*	*9*	*2*	*3*	*4*

Asignar las piezas en forma tal de minimizar la diferencia de tiempos de ocupación de las máquinas.

Resolución

Definición de variables:

#i: Variable binaria de asignación de la pieza # (A, B, C, D o E) a la máquina i.

Ti: tiempo total de ocupación de la máquina i.

D^+: Diferencia positiva de tiempo que surge de la resta T1 – T2.

D^-: Diferencia negativa de tiempo que surge de la resta T1 – T2.

Formulación:

MIN $D^+ + D^-$

Sujeto a

$3\,A1 + 4\,B1 + 7\,C1 + 5\,D1 + 4\,E1 - T1 = 0$

$5\,A2 + 9\,B2 + 2\,C2 + 3\,D2 + 4\,E2 - T2 = 0$

$A1 + A2 = 1$

$B1 + B2 = 1$

$C1 + C2 = 1$

$D1 + D2 = 1$

$E1 + E2 = 1$

$T1 - D^+ + D^- - T2 = 0$

siendo Ai, Bi, Ci, Di y Ei binarias
y todas las variables no negativas

Las dos primeras ecuaciones se plantean para determinar los tiempos de ocupación de las máquinas. Como cada pieza se debe elaborar en una de las dos máquinas, se formulan las cinco ecuaciones siguientes para hacer mutuamente excluyentes las operaciones en cada máquina. Finalmente la última ecuación establece el exceso (D^+) y el defecto (D^-) de tiempo de ocupación de la máquina 1 con respecto de 2. Estas diferencia D^+ y D^- son las que deben minimizarse.

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

    Z)     1

VARIABLE          VALOR

B1                1
C1                1
A2                1
```

```
D2        1
E2        1
D+        0
D-        1
T1        11
T2        12
```

En consecuencia, se asignan las pieza B y C a la máquina 1, mientras que las piezas A, D y E se asignan a la máquina 2.

La diferencia entre T2 y T1 es de solo 1 hora. El hecho de que D^- es negativa significa que T2 > T1.

Obsérvese que, como D^- está activada, D^+ está desactivada.

PROBLEMA No. 08
INDUSTRIA: SERVICIOS
SECTOR: MARKETING
OBJETO: MEZCLA PUBLICITARIA

Una empresa planea su campaña publicitaria para anunciar el lanzamiento de un nuevo producto.

Para esta campaña ha previsto una inversión máxima de $ 125000 para el próximo mes.

Luego de un estudio de segmentación de mercado y de los medios publicitarios factibles para promocionar el proyecto, las posibilidades se han reducido a cinco:

1. *Aviso de media página en el suplemento dominical del diario DI*
2. *Espacio publicitario en el programa semanal de cable CA*
3. *Espacio publicitario en el programa semanal de Televisión TV*
4. *Espacio publicitario en el programa semanal de Radio RA*
5. *Aviso de una página en la revista mensual RE*
6. *Exposiciones en vagones de subterráneos SU*

Se ha recopilado la siguiente información para cada alternativa:

	DI	CA	TV	RA	RE
Costo por emisión	$ 4000	$6000	$ 15000	$ 2000	$ 5000
Cantidad de emisiones por mes	4	4	4	8	1
Total de audicencia por emisión	15000	7000	40000	8000	14000
Total de individuos grupo A alcanzados	4000	3000	12000	2000	6000
Total de individuos grupo B alcanzados	3000	2000	15000	2000	2000
Total de individuos grupo C alcanzados	6000	1500	11000	2000	4000

Con respecto a los subterráneos, puede haber disponible un máximo de 20 vagones para el próximo mes, a un costo de $1000 cada uno. Se supone que por cada vagón se obtiene una audiencia total de 2000, de los cuales el 20% es de clase A, el 30% es de la clase B, y un 40% es de la clase C.

La empresa pretende alcanzar en el mes como mínimo 70000 miembros de la clase A, 80000 de la clase B y 90000 de la clase C.

Formular un problema de programación lineal que permita maximizar la audiencia total.

Resolución

Definición de variables:

DI: Cantidad de avisos mensuales a contratar en el diario

CA: Cantidad de emisiones mensuales a contratar en el cable

TV: Cantidad de emisiones mensuales a contratar en televisión

RA: Cantidad de emisiones mensuales a contratar en radio

RE: Cantidad de avisos mensuales a contratar en la revista

SU: Cantidad de vagones de subterráneo a contratar en el mes

Formulación:

	DI	CA	TV	RA	RE	SU	Signo	RHS
Z)	15000	7000	40000	8000	14000	2000		MAX
INV)	4000	6000	15000	2000	5000	1000	≤	125000
A)	4000	3000	12000	2000	6000	400	≥	70000
B)	3000	2000	15000	2000	2000	600	≥	80000
C)	6000	1500	11000	2000	4000	800	≥	90000
DDI)	1						≤	4
DCA)		1					≤	4
DTV)			1				≤	4
DRA)				1			≤	8
DRE)					1		≤	1
DSU)						1	≤	20
	E, NN	E, NN	E, NN	E, NN	E, NN	E, NN		

Solución:

```
        VALOR DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

          Z)         282000.00

     VARIABLE           VALOR        COSTO OP.

          DI             4.00            0.00
          CA             0.00         1000.00
          TV             4.00            0.00
```

RA	1.00	0.00
RE	1.00	0.00
SU	20.00	0.00

RESTRICCIÓN	SLACK	V.MARGINAL
INV)	22000.00	0.00
A)	10000.00	0.00
B)	8000.00	0.00
C)	0.00	-4.00
DDI)	0.00	9000.00
DCA)	4.00	0.00
DTV)	0.00	4000.00
DRA)	7.00	0.00
DRE)	0.00	2000.00
DSU)	0.00	1200.00

No. DE ITERACIONES = 12

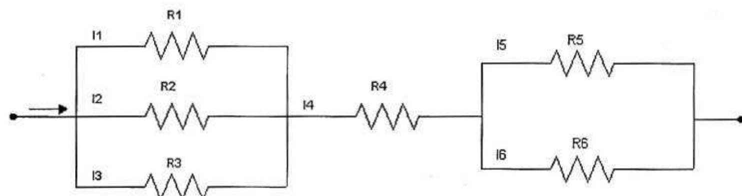
PROBLEMA No. 09
INDUSTRIA: ELECTRÓNICA
SECTOR: INGENIERÍA
OBJETO: CÁLCULO

En el circuito eléctrico de la figura se tiene:

I_i = *corriente (en amperes que circula por la resistencia i)*
V_i = *caída de potencial (en volts sobre la resistencia i)*
R_i = *resistencia (en ohms de la resistencia i)*

1) *Suponiendo que la caída de potencial en cada resistencia debe estar entre 2 y 10 volts, y sabiendo que* $I_1 = 4$, $I_2 = 6$, $I_3 = 8$ *e* $I_5 = 10$, *formular un modelo que permita minimizar la potencia total disipada.*

2) *Suponiendo que la corriente que pasa por cada resistencia debe estar entre 1 y 6 amperes, y sabiendo que la caída de potencial es* $V_1 = V_2 = V_3 = 6$, $V_4 = 4$ *y* $V_5 = V_6 = 5$, *formular un modelo que permita minimizar la potencia total disipada.*



Resolución

Consideraciones:

Aplicando las leyes de Kirchoff, tendremos que

$\mathbf{V_1 = V_2 = V_3 = V_A}$

$\mathbf{V_5 = V_6 = V_B}$

y que

$\mathbf{I_1 + I_2 + I_3 = I_4 = 18}$

$\mathbf{I_5 + I_6 = I_4 = 18}$

Además, la ley de Ohm establece que $\mathbf{V_i = I_i\, R_i}$

La potencia total disipada que pasa por la resistencia i es igual a $\mathbf{I_i^2\, R_i}$.

Formulación:

- Funcional:

  MIN: 16 R1 + 36 R2 + 64 R3 + 324 R4 + 100 R5 + 64 R6

- Sujeto a las siguientes restricciones:

  VA – 4 R1 = 0

  VA – 6 R2 = 0

  VA – 8 R3 = 0

  V4 – 18 R4 = 0

  VB – 10 R5 = 0

  VB – 8 R6 = 0

  VA ≤ 10

  VA ≥ 2

  V4 ≤ 10

  V4 ≥ 2

  VB ≤ 10

  VB ≥ 2

- Condiciones de las variables:

  Todas continuas no negativas

Solución:

Resolviendo el modelo con el sistema LINDO, el informe de salida es el siguiente:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

  Z)       108.00

VARIABLE        VALOR          COSTO REDUC.
     R1        0.500000          0.000000
     R2        0.333333          0.000000
     R3        0.250000          0.000000
     R4        0.111111          0.000000
     R5        0.200000          0.000000
     R6        0.250000          0.000000
     VA        2.000000          0.000000
     V4        2.000000          0.000000
     VB        2.000000          0.000000
```

FILA	SLACK	V. MARGINAL
2)	0.000000	4.000000
3)	0.000000	6.000000
4)	0.000000	8.000000
5)	0.000000	18.00000
6)	0.000000	10.00000
7)	0.000000	8.000000
8)	8.000000	0.000000
9)	0.000000	-18.0000
10)	8.000000	0.000000
11)	0.000000	-18.0000
12)	8.000000	0.000000
13)	0.000000	-18.0000

NO. DE ITERACIONES = 3

Para la segunda pregunta, a fin de formular el problema en forma lineal se definen variables Xi como inversas de las respectivas resistencias Ri.

$$X_i = \frac{1}{R_i}$$

De manera que la expresión de la ley de Ohm aplicada a cada resistencia quedará:

$$V_i = i_i.R_i \quad \therefore \quad V_i.\frac{1}{R_i} = i_i \quad \therefore \quad V_i.x_i = i_i \quad \therefore \quad V_i.x_i - i_i = 0$$

Por su parte, el funcional tendrá la siguiente expresión:

$$Z = \sum i_i^2.R_i = \sum \frac{V_i^2}{R_i^2} R_i = \sum V_i^2.X_i$$

En consecuencia, el problema queda entonces formulado como sigue:

- Funcional

  MIN: 36 X1 + 36 X2 + 36 X3 + 16 X4 +25 X5 +25 X6

- Restricciones:

  - I4 + I1 +I2 + I3 = 0
  - I4 + I5 +I6 = 0
  $I1 \geq 1$
  $I1 \leq 6$
  $I2 \geq 1$
  $I2 \leq 6$
  $I3 \geq 1$
  $I3 \leq 6$
  $I4 \geq 1$
  $I4 \leq 6$
  $I5 \geq 1$
  $I5 \leq 6$
  $I6 \geq 1$

I6 ≤ 6
6 X1 – I1 = 0
6 X2 – I2 = 0
6 X3 – I3 = 0
4 X4 – I4 = 0
5 X5 – I5 = 0
5 X6 – I6 = 0
siendo todas las variables continuas y no negativas.

Solución:

```
        VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

        1)        45.00000

    VARIABLE     VALOR          COSTO REDUC.
          X1    0.166667           0.000000
          X2    0.166667           0.000000
          X3    0.166667           0.000000
          X4    0.750000           0.000000
          X5    0.200000           0.000000
          X6    0.400000           0.000000
          I4    3.000000           0.000000
          I1    1.000000           0.000000
          I2    1.000000           0.000000
          I3    1.000000           0.000000
          I5    1.000000           0.000000
          I6    2.000000           0.000000

        FILA     SLACK          V. MARGINAL
          2)    0.000000           9.000000
          3)    0.000000          -5.00000
          4)    0.000000          -15.0000
          5)    5.000000           0.000000
          6)    0.000000          -15.0000
          7)    5.000000           0.000000
          8)    0.000000          -15.0000
          9)    5.000000           0.000000
         10)    2.000000           0.000000
         11)    3.000000           0.000000
         12)    0.000000           0.000000
         13)    5.000000           0.000000
         14)    1.000000           0.000000
         15)    4.000000           0.000000
         16)    0.000000          -6.00000
         17)    0.000000          -6.00000
         18)    0.000000          -6.00000
         19)    0.000000          -4.00000
         20)    0.000000          -5.00000
         21)    0.000000          -5.00000

    NÚMERO DE ITERACIONES =        7
```

En consecuencia, $R_1 = R_2 = R_3 = 6$, $R_4 = 1.33$; $R_5 = 5$; y $R_6 = 2.5$

PROBLEMA No. 10
INDUSTRIA: GENERAL
SECTOR: PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN
OBJETO: PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Una empresa que fabrica dos productos, A y B, en una misma máquina debe planificar la producción semanal del próximo mes, cuyas demandas máximas y requerimientos mínimos son los siguientes:

Demanda (unidades)	SEMANA			
	1	2	3	4
A	90	80	75	110
B	25	55	30	35

Requerimiento mínimo (unidades)	SEMANA			
	1	2	3	4
A	10	60	55	90
B	10	45	20	30

La disponibilidad de horas semanales de máquina se indica en la siguiente tabla:

DISPONIBILIDAD DE MÁQUINA	SEMANA			
	1	2	3	4
Horas	80	80	70	80

Los datos relativos a tiempos y costos de puesta en marcha de la línea de producción y de materia prima por producto, como así también de los precios de venta y del costo de hora de máquina, se muestran en la próxima tabla:

	A	B
Tiempo de puesta en marcha (hs)	6	5
Costo de puesta en marcha ($)	3000	4000
Tiempo de máquina (hs)	0.4	0.8
Costo materiales ($)	15	9
Precio de venta ($)	250	300

El costo de la hora de máquina en producción es de 8$. Actualmente se dispone en stock de 20 unidades de A y 30 de B, y al finalizar el mes, el nivel de inventarios debe ser el mismo. El costo unitario de mantenimiento en stock de cada producto es de $3 por semana para A y de $3.5 para B. Cada semana se para la línea para hacer operaciones de limpieza, de manera que si un producto se fabrica en una semana determinada se incurre en el correspondiente costo de puesta en marcha.

El almacén de productos terminados tiene una capacidad para almacenar 200 unidades de A o 150 de B (o una combinación de ellas).

Formular y resolver el modelo matemático si sólo se puede fabricar uno de los productos por semana.

Resolución

Definición de variables:

P#i: Producción de # en la semana i (para # igual a A o B).

S#i: Stock de # al finalizar la semana i.

V#i: Venta de # en la semana i.

V#: Venta de # en el mes.

I#i: Variable binaria para indicar si el producto # se elabora o no en la semana i

E#: Variable entera totalizadora que indica la cantidad de semanas que se fabrica el producto #.

T: Tiempo total de máquina utilizado en el mes.

TP: Tiempo de máquina en producción en el mes.

SP#: Stock promedio del mes del producto #.

Formulación:

- Funcional:

  MAX 250 VA + 300 VB - 3000 EA - 4000 EB - 8 TP - 15 PA - 9 PB - 3 SPA - 3.5 SPB

Sujeto a:

- Balance de inventarios. En una semana cualquiera, tendremos que el stock inicial más la producción de la semana debe ser igual a la venta de la semana más el stock final.

BIA) SA0 = 20
BSA1) SA0 + PA1 - SA1 - VA1 = 0
BSA2) SA1 + PA2 - SA2 - VA2 = 0
BSA3) SA2 + PA3 - SA3 - VA3 = 0
BSA4) SA3 + PA4 - SA4 - VA4 = 0
BFA) SA4 = 20
BSB0) SB0 = 30
BSB1) SB0 + PB1 - SB1 - VB1 = 0
BSB2) SB1 + PB2 - SB2 - VB2 = 0
BSB3) SB2 + PB3 - SB3 - VB3 = 0
BSB4) SB3 + PB4 - SB4 - VB4 = 0
BFB) SB4 = 30

- Las ventas semanales no pueden superar a la demanda:

DA1) VA1 ≤ 90
DA2) VA2 ≤ 80
DA3) VA3 ≤ 75
DA4) VA4 ≤ 110
DB1) VB1 ≤ 25
DB2) VB2 ≤ 55

DB3) $VB3 \leq 30$
DB4) $VB4 \leq 35$

- Requerimiento mínimo:

RA1) $VA1 \geq 10$
RA2) $VA2 \geq 60$
RA3) $VA3 \geq 55$
RA4) $VA4 \geq 90$

RB1) $VB1 \geq 10$
RB2) $VB2 \geq 45$
RB3) $VB3 \geq 20$
RB4) $VB4 \geq 30$

- Restricciones de almacenamiento:

Teniendo en cuenta que la capacidad de almacenamiento es tal que si se almacena solamente producto A se puede tener en stock como máximo 200 unidades y si se almacena solamente producto B se puede tener en stock como máximo 150 unidades, las restricciones de almacenamiento son del tipo:

$$\frac{SA_i}{200} + \frac{SB_i}{150} \leq 1$$

A1) $0.005\ SA1 + 0.004\ SB1 \leq 1$
A2) $0.005\ SA2 + 0.004\ SB2 \leq 1$
A3) $0.005\ SA3 + 0.004\ SB3 \leq 1$
A4) $0.005\ SA4 + 0.004\ SB4 \leq 1$

- Restricciones de habilitación de variables continuas correspondientes a la producción semanal de cada ítem mediante variables binarias. Para ello, tomaremos un valor M arbitrariamente alto que afecte a la variable binaria. En este caso, usaremos M = 500.

BPA1) $PA1 - 500\ IA1 \leq 0$
BPA2) $PA2 - 500\ IA2 \leq 0$
BPA3) $PA3 - 500\ IA3 \leq 0$
BPA4) $PA4 - 500\ IA4 \leq 0$

BPB1) $PB1 - 500\ IB1 \leq 0$
BPB2) $PB2 - 500\ IB2 \leq 0$
BPB3) $PB3 - 500\ IB3 \leq 0$
BPB4) $PB4 - 500\ IB4 \leq 0$

- Restricciones de tiempo total de máquina (en operación y en preparación) de cada período son:

TTM1) $0.4\ PA1 + 6\ IA1 + 0.8\ PB1 + 5\ IB1 \leq 80$
TTM2) $0.4\ PA2 + 6\ IA2 + 0.8\ PB2 + 5\ IB2 \leq 80$
TTM3) $0.4\ PA3 + 6\ IA3 + 0.8\ PB3 + 5\ IB3 \leq 70$
TTM4) $0.4\ PA4 + 6\ IA4 + 0.8\ PB4 + 5\ IB4 \leq 80$

- Cálculo de tiempo total productivo de máquina:

TPM) $0.4PA1 + 0.4PA2 + 0.4PA3 + 0.4PA4 + 0.8PB1 + 0.8PB2 + 0.8PB3 + 0.8PB4 - TP = 0$

- Cálculo de stock promedio. El stock promedio de cada ítem será la suma de S0 + S1 + S2 + S3 + S4 dividido por 5. En consecuencia:

  SPA) - 5 SPA + SA0 + SA1 + SA2 + SA3 + SA4 = 0

  SPB) - 5 SPB + SB0 + SB1 + SB2 + SB3 + SB4 = 0

- Fabricación de productos mutuamente excluyente:

  RPU1) IA1 + IB1 $\leq$ 1
  RPU2) IA2 + IB2 $\leq$ 1
  RPU3) IA3 + IB3 $\leq$ 1
  RPU4) IA4 + IB4 $\leq$ 1

- Totalizadores para venta, producción total y cantidad de semanas que se activa la línea, para cada producto:

  BVTA) - VA + VA1 + VA2 + VA3 + VA4 = 0
  BPTA) - PA + PA1 + PA2 + PA3 + PA4 = 0
  BTSA) - EA + IA1 + IA2 + IA3 + IA4 = 0

  BVTB) - VB + VB1 + VB2 + VB3 + VB4 = 0
  BPTB) - PB + PB1 + PB2 + PB3 + PB4 = 0
  BTSB) - EB + IB1 + IB2 + IB3 + IB4 = 0

- Condiciones de las variables:

  Las variables son todas no negativas, excepto las I#i que son binarias. Las E# no requieren definirse como enteras porque serán naturalmente enteras.

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

     Z)       106985.5

VARIABLE          VALOR       C.REDUCIDO
     IA1           1.00          6450.00
     IB1           0.00          6875.00
     IA2           0.00       -112300.00
     IB2           1.00          4000.00
     IA3           1.00          6468.00
     IB3           0.00          6890.00
     IA4           0.00       -112900.00
     IB4           1.00          4000.00
      VA         345.00             0.00
      VB         145.00             0.00
      EA           2.00             0.00
      EB           2.00             0.00
      TP         254.00             0.00
      PA         345.00             0.00
      PB         145.00             0.00
     SPA          62.00             0.00
     SPB          19.00             0.00
     SA0          20.00             0.00
     PA1         185.00             0.00
     SA1         115.00             0.00
     VA1          90.00             0.00
     PA2           0.00             0.00
```

SA2	35.00	0.00
VA2	80.00	0.00
PA3	160.00	0.00
SA3	120.00	0.00
VA3	75.00	0.00
PA4	0.00	0.00
SA4	20.00	0.00
VA4	100.00	0.00
SB0	30.00	0.00
PB1	0.00	460.70
SB1	5.00	0.00
VB1	25.00	0.00
PB2	80.00	0.00
SB2	30.00	0.00
VB2	55.00	0.00
PB3	0.00	461.70
SB3	0.00	1.40
VB3	30.00	0.00
PB4	65.00	0.00
SB4	30.00	0.00
VB4	35.00	0.00

RESTRICCIÓN	SLACK	P.SOMBRA
BIA)	0.00	247.60
BSA1)	0.00	-248.20
BSA2)	0.00	-248.80
BSA3)	0.00	-249.40
BSA4)	0.00	-250.00
BFA)	0.00	-250.60
BSB0)	0.00	14.00
BSB1)	0.00	-14.70
BSB2)	0.00	-15.40
BSB3)	0.00	-16.10
BSB4)	0.00	-15.40
BFB)	0.00	-16.10
DA1)	0.00	1.80
DA2)	0.00	1.20
DA3)	0.00	0.60
DA4)	10.00	0.00
DB1)	0.00	285.30
DB2)	0.00	284.60
DB3)	0.00	283.90
DB4)	0.00	284.60
RA1)	80.00	0.00
RA2)	20.00	0.00
RA3)	20.00	0.00
RA4)	10.00	0.00
RB1)	15.00	0.00
RB2)	10.00	0.00
RB3)	10.00	0.00
RB4)	5.00	0.00
A1)	0.41	0.00
A2)	0.71	0.00
A3)	0.40	0.00
A4)	0.78	0.00
BPA1)	315.00	0.00
BPA2)	0.00	230.60
BPA3)	340.00	0.00
BPA4)	0.00	231.80

```
BPB1)      0.00      0.00
BPB2)    420.00      0.00
BPB3)      0.00      0.00
BPB4)    435.00      0.00
TTM1)      0.00    575.00
TTM2)     11.00      0.00
TTM3)      0.00    578.00
TTM4)     23.00      0.00
 TPM)      0.00      8.00
 SPA)      0.00      0.60
 SPB)      0.00      0.70
RPU1)      0.00      0.00
RPU2)      0.00      0.00
RPU3)      0.00      0.00
RPU4)      0.00      0.00
BVTA)      0.00   -250.00
BPTA)      0.00     15.00
BTSA)      0.00   3000.00
BVTB)      0.00   -300.00
BPTB)      0.00      9.00
BTSB)      0.00   4000.00
```

PROBLEMA No.11
INDUSTRIA: MANUFACTURA
SECTOR: PROGRAMACIÓN DE LA PRODUCCIÓN
OBJETO: SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS

En una fábrica, tres tipos de piezas en bruto se someten a un proceso en una máquina que opera las 24 horas del día y luego a un control de calidad. En un día determinado, se dispone de 100 unidades de piezas en bruto para la fabricación de P1, 150 unidades para la fabricación de P2 y 100 unidades para la fabricación de P3.

La máquina puede operar en tres modalidades diferentes: X, Y y Z, siendo las tasas de fabricación las siguientes:

	P1			P2			P3		
MODALIDAD	**X**	**Y**	**Z**	**X**	**Y**	**Z**	**X**	**Y**	**Z**
Piezas/hora	10	12	15	12	11	16	9	12	4

El control de calidad de las piezas P1 requiere 0.1 h mientras que el de las P2 insume 0.15 h, y el de las P3 0.08 h. Se dispone de 300 horas hombre para el control de calidad por día.

Como resultado del control de calidad, los siguientes porcentajes de piezas A y B requieren un reprocesamiento que insume igual tiempo de fabricación que las piezas en bruto:

MODALIDAD	**X**	**Y**	**Z**
PORCENTAJE	10%	12%	14%

Si la contribución marginal de P1, P2 y P3 es de $40, $50 y $45 respectivamente, y se debe producir un número entero de piezas por semana,

1. *modelizar y resolver por computadora el problema, si durante el día se puede operar la máquina en todas sus modalidades. En tal caso, qué porcentaje del tiempo de utilización debe operar la máquina en cada una de las modalidades.*

2. *Ídem si solamente se puede operar en una sola modalidad durante el día.*
3. *Ídem si se puede operar en las tres modalidades, pero cambiar de una modalidad a otra durante el día implica un costo de $5000.*

Resolución

Definición de variables:

Pi#: Cantidad de piezas i (1,2,3) a procesar en la modalidad # (X,Y,Z)

Pi: Cantidad de piezas i a procesar

UM: Utilización de máquina (hs/día)

Consideraciones:

La restricción de la utilización de la máquina (en horas por día) debe contemplar la tasa de elaboración de las piezas que se procesan por primera vez más las que se están reciclando. Por ejemplo, el tiempo que requiere la fabricación de piezas 1 en la modalidad X será:

$$\frac{P1X}{10 \cdot 0.90}$$

ya que la velocidad de procesamiento es de 10 unidades por hora y que se debe reprocesar un 10% de las piezas que pasan por Control de Calidad. En consecuencia, la restricción de procesamiento en la máquina será:

$$\frac{P1X}{10.0.90}+\frac{P1Y}{12.0.88}+\frac{P1Z}{15.0.86}+\frac{P2X}{12.0.90}+\frac{P2Y}{11.0.88}+\frac{P2Z}{16.0.86}+\frac{P3X}{9.0.90}+\frac{P3Y}{12.0.88}+\frac{P3Z}{4.0.86}-UM=0$$

la que, expresada en el formato de PL queda:

0.1111 P1X + 0.0947 P1Y + 0.0775 P1Z + 0.0926 P2X + 0.1033 P2Y + 0.0727 P2Z + 0.1235 P3X + 0.0947 P3Y + 0.2907 P3Z - UM = 0

En el sector de control de calidad también se debe contemplar el reprocesamiento, por lo que la restricción física será:

$$\frac{P1X \cdot 0{,}10}{0.90}+\frac{P1Y \cdot 0{,}10}{0.88}+\frac{P1Z \cdot 0{,}10}{0.86}+\frac{P2X \cdot 0{,}15}{0.90}+\frac{P2Y \cdot 0{,}15}{0.88}+\frac{P2Z \cdot 0{,}15}{0.86}+\frac{P3X \cdot 0{,}08}{0.90}+\frac{P3Y \cdot 0{,}08}{0.88}+\frac{P3Z \cdot 0{,}08}{0.86}\leq 300$$

Es decir:

0.1111 P1X + 0.1136 P1Y + 0.1163 P1Z + 0.1667 P2X + 0.1705 P2Y + 0.1744 P2Z + 0.0889 P3X + 0.0909 P3Y + 0.0930 P3Z ≤ 300

Formulación:

- Funcional:

  MAX 40 P1 + 50 P2 + 45 P3

Sujeto a:

- Restricciones:

  D1) $P1 \leq 100$

  D2) $P2 \leq 150$

  D3) $P3 \leq 100$

  UM) 0.1111 P1X + 0.0947 P1Y + 0.0775 P1Z + 0.0926 P2X + 0.1033 P2Y + 0.0727 P2Z + 0.1235 P3X + 0.0947 P3Y + 0.2907 P3Z - UM = 0

  DM) $UM \leq 24$

  CC) 0.1111 P1X + 0.1136 P1Y + 0.1163 P1Z + 0.1667 P2X + 0.1705 P2Y + 0.1744 P2Z + 0.0889 P3X + 0.0909 P3Y + 0.0930 P3Z $\leq$ 300

  BP1) -P1 + P1X + P1Y + P1Z = 0

  BP2 -P2 + P2X + P2Y + P2Z = 0

  BP3) -P3 + P3X + P3Y + P3Z = 0

- Condiciones de las variables:

  Se definen las variables Pi# como enteras.

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 14030.00

VARIABLE	VALOR	C.OPORTUNIDAD
P1X	0.000000	-40.000000
P2X	0.000000	-50.000000
P3X	0.000000	-45.000000
P1Y	0.000000	-40.000000
P2Y	0.000000	-50.000000
P3Y	58.000000	-45.000000
P1Z	98.000000	-40.000000
P2Z	150.000000	-50.000000
P3Z	0.000000	-45.000000
P1	98.000000	0.000000
P2	150.000000	0.000000
P3	58.000000	0.000000
UM	23.992599	0.000000

RESTRICCIÓN	SLACK	V. MARGINAL
D1)	2.000000	0.000000
D2)	0.000000	0.000000
D3)	42.000000	0.000000
UM)	0.000000	0.000000
M)	0.007400	0.000000
CC)	257.170410	0.000000
BP1)	0.000000	-40.000000
BP2)	0.000000	-50.000000
BP3)	0.000000	-45.000000

NO. ITERACIONES = 50

Como vemos, la máquina se opera en dos modalidades por día (Y y Z). Los porcentajes de tiempo en cada una de las modalidades son:

a. Modalidad X: (0.1111 P1X + 0.0926 P2X + 0.1235 P3X) / UM = 0 %

b. Modalidad Y: (0.0947 P1Y + 0.1033 P2Y + 0.0947 P3Y) / UM = 77,11 %

c. Modalidad Z: (0.0775 P1Z + 0.0727 P2Z + 0.2907 P3Z) / UM = 22,89 %

Para responder a la segunda pregunta se deben definir variables binarias IX, IY e IZ para habilitar o no cada una de las modalidades. Luego:

IX1) $P1X - 500\ IX \leq 0$
IY1) $P1Y - 500\ IY \leq 0$
IZ1) $P1Z - 500\ IZ \leq 0$
IX2) $P2X - 500\ IX \leq 0$
IY2) $P2Y - 500\ IY \leq 0$
IZ2) $P2Z - 500\ IZ \leq 0$
IX3) $P3X - 500\ IX \leq 0$
IY3) $P3Y - 500\ IY \leq 0$
IZ3) $P3Z - 500\ IZ \leq 0$
BI) $IX + IY + IZ \leq 1$

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 12310.00

VARIABLE	VALOR	C.OPORTUNIDAD
P1X	0.000000	0.000000
P2X	0.000000	-50.000000
P3X	0.000000	-45.000000
P1Y	0.000000	0.000000
P2Y	0.000000	-50.000000
P3Y	0.000000	-45.000000
P1Z	100.000000	0.000000
P2Z	150.000000	-50.000000
P3Z	18.000000	-45.000000
IX	0.000000	0.000000
IY	0.000000	0.000000
IZ	1.000000	0.000000
P1	100.000000	0.000000
P2	150.000000	0.000000

P3	18.000000	0.000000
UM	23.887600	0.000000

RESTRICCIÓN	SLACK	V. MARGINAL
D1)	0.000000	40.000000
D2)	0.000000	0.000000
D3)	82.000000	0.000000
UM)	0.000000	0.000000
DM)	0.112400	0.000000
CC)	260.536011	0.000000
BP1)	0.000000	0.000000
BP2)	0.000000	-50.000000
BP3)	0.000000	-45.000000
IX1)	0.000000	0.000000
IY1)	0.000000	0.000000
IZ1)	400.000000	0.000000
IX2)	0.000000	0.000000
IY2)	0.000000	0.000000
IZ2)	350.000000	0.000000
IX3)	0.000000	0.000000
IY3)	0.000000	0.000000
IZ3)	482.000000	0.000000
BI)	0.000000	0.000000

Finalmente, para la tercera pregunta, se efectúan sobre el segundo caso los siguientes cambios:

Se elimina la restricción BI).

Se define la variable E como la cantidad de modalidades diferentes que se opera la máquina en el día.

NM) $IX + IY + IZ - E = 0$

Se puede definir también la variable CC como cantidad de cambios de modalidades diferentes en que se va a operar la máquina en el día. Obviamente la cantidad de cambios es igual a E - 1, es decir:

CC) $E - CC = 1$

Si E es igual a 0 o 1 no se efectúa ningún cambio de modalidad y en consecuencia no se incurre en ningún costo; si E es igual a 2 se realiza un cambio en el día, y si es igual a 3 se llevan a cabo dos cambios. En estos dos casos se incurre en costo fijo. En consecuencia, definiendo una variable binaria I, las siguientes restricciones representan esa situación:

E1) $E - 2\,I \leq 1$

E2) $E - 2\,I \geq 0$

Si I = 1 la variable E estará comprendida entre 2 y 3. Si, en cambio I = 0, la variable E estará comprendida entre 0 y 1.

Finalmente, se afecta el funcional con los 5000 $ por cada cambio de modalidad:

MAX $40\,P1 + 50\,P2 + 45\,P3 - 5000\,CC$

Solución:

Z) 12310.00

VARIABLE	VALOR	C.OPORTUNIDAD
P1X	0.000000	-40.000000
P2X	0.000000	0.000000
P3X	0.000000	-45.000000

P1Y	0.000000	-40.000000
P2Y	0.000000	0.000000
P3Y	0.000000	-45.000000
P1Z	100.000000	-40.000000
P2Z	150.000000	0.000000
P3Z	18.000000	-45.000000
IX	0.000000	5000.000000
IY	0.000000	5000.000000
IZ	1.000000	5000.000000
I	0.000000	0.000000
P1	100.000000	0.000000
P2	150.000000	0.000000
P3	18.000000	0.000000
CC	0.000000	0.000000
UM	23.887600	0.000000
E	1.000000	0.000000

RESTRICCIÓN	SLACK	V. MARGINAL
D1)	0.000000	0.000000
D2)	0.000000	50.000000
D3)	82.000000	0.000000
UM)	0.000000	0.000000
DM)	0.112400	0.000000
CC)	260.536011	0.000000
BP1)	0.000000	-40.000000
BP2)	0.000000	0.000000
BP3)	0.000000	-45.000000
IX1)	0.000000	0.000000
IY1)	0.000000	0.000000
IZ1)	400.000000	0.000000
IX2)	0.000000	0.000000
IY2)	0.000000	0.000000
IZ2)	350.000000	0.000000
IX3)	0.000000	0.000000
IY3)	0.000000	0.000000
IZ3)	482.000000	0.000000
NM)	0.000000	5000.000000
E1)	0.000000	0.000000
E2)	1.000000	0.000000
CC)	0.000000	5000.000000

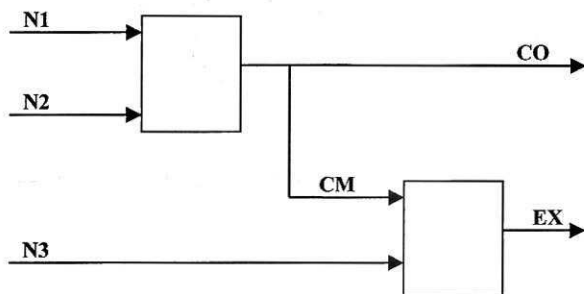
PROBLEMA No. 12
INDUSTRIA: PETRÓLEO
SECTOR: PROGRAMACIÓN
OBJETO: RECURRENCIA

Se deben mezclar componentes de naftas para obtener nafta común (número de octanos mínimo 87) y nafta extra (número de octanos mínimo 94). La nafta común se forma con el componente N1 (número de octanos 85) y N2 (número de octanos 92). La nafta extra se forma mezclando parte de la nafta común producida con N3 (número de octanos 98). Las disponibilidades de los componentes, requerimientos mínimo y máximo de las naftas, costos y precios de venta se indican en el siguiente cuadro.

	DISPONIBILIDAD	REQUER. MÍNIMO	REQUER. MÁXIMO	COSTO $	PREVIO VENTA $
N1	5000			0.8	
N2	3000			0.85	
N3	2000			1.25	
Común		2500	3500		1.00
Extra			4000		1.20

Resolución

El gráfico correspondiente a este problema es el siguiente:



Definición de variables:

EX: Nafta extra elaborada

CO: Nafta común elaborada

N1: Cantidad de componente 1

N2: Cantidad de componente 2

N3: Cantidad de componente 3

Q: Número de octanos de la nafta común

Formulación:

- Funcional

  MAX 1.2 EX + 1 CO - 0.8 N1 - 0.85 N2 - 1.25 N3

- Sujeto a:

  2) $N1 \leq 5000$
  3) $N2 \leq 3000$
  4) $N3 \leq 2000$
  5) $CO \geq 2500$
  6) $CO \leq 3500$

7) $EX \leq 4000$
8) $N1 + N2 - CM - CO = 0$
9) $CM + N3 - EX = 0$
10) $85\ N1 + 92\ N2 - Q\ .\ CM - Q\ CO \geq 0$
11) $Q\ .\ CM + 98\ \ N3 - 94\ \ EX \geq 0$

- Condiciones de las variables:

  No negativas

Solución:

Resolveremos este problema no lineal en el entorno de la PL, aplicando la técnica de la recurrencia. Se comienza asumiendo un valor de Q, por ejemplo 87. Luego se prueba para $Q_n = Q_n + 1$ y así sucesivamente, hasta que el funcional comience a decrecer:

Iteración	1	2	3	4
Q	87	88	89	90
Z	990.82	1029.76	1094.29	945.00

El óptimo está en un valor de Q comprendido entre 88 y 90. En consecuencia se prueba para Q = 88.5 y para Q = 89.5.

Iteración	5	6
Q	88.5	89.5
Z	1057.96	1038.89

Esto significa que el óptimo se encuentra entre Q = 88.5 y Q = 89.5. Se prueba entonces para Q = 88.75 y para Q = 89.25

Iteración	5	6
Q	88.75	89.25
Z	1074.96	1075.08

El próximo paso consiste en probar con Q = 88.875 y Q = 89.125

Iteración	7	8
Q	88.875	89.125
Z	1084.71	1096.39

Como el valor del funcional para la iteración 8 es mejor que la de la iteración 3 y éste mejor que la de la iteración 7, el óptimo estará entonces entre Q = 89 y Q = 89.125. Esta ya es una muy buena aproximación. Si se quiere seguir iterando, se podría explorar la solución para dos valores intermedios, por ejemplo Q = 89.05 y Q = 89.09

Iteración	9	10
Q	89.05	89.09
Z	1098.46	1101.88

Siendo esta última una excelente aproximación a la solución óptima, cuyo resultado se indica a continuación:

Funcional: 1101.882

Variable	Valor	Costo Oport.
EX	3629.3280	0.000000
CO	3500.0000	0.000000
N1	2132.3350	0.000000
N2	2996.9930	0.000000
N3	2000.0000	0.000000
CM	1629.3280	0.000000

Restricc.	Slack	V.Marginal
1	1101.8820	1.0000000
2	2867.6650	0.0000000
3	3.0069830	0.0000000
4	0.0000000	0.2520657
5	1000.0000	0.0000000
6	0.0000000	0.1707857
7	3629.3280	0.0000000
8	370.67210	0.0000000
9	0.0000000	-0.1928571
10	0.0000000	5.8985450
11	0.0000000	-0.0071429
12	0.0000000	-0.0755164

PROBLEMA No. 13
INDUSTRIA: SERVICIOS
SECTOR: LOGÍSTICA
OBJETO: LOCALIZACIÓN

Una empresa de servicios de computación planea atender seis ciudades. Se debe determinar en qué ciudades hay que instalar un centro de reparación a fin de mantener una mínima cantidad de ellos, pero asegurando que cada centro de reparación esté dentro de 20 minutos en tiempo de viaje de cada ciudad.

Los tiempos de viaje entre ciudades son los siguientes:

	Hacia					
Desde	**Ciudad 1**	**Ciudad 2**	**Ciudad 3**	**Ciudad 4**	**Ciudad 5**	**Ciudad 6**
Ciudad 1		12	20	30	33	22
Ciudad 2	12		25	35	20	10
Ciudad 3	20	25		14	30	20
Ciudad 4	30	35	14		15	25
Ciudad 5	33	20	30	15		14
Ciudad 6	22	10	20	25	14	

¿Cuál sería el resultado si el tiempo de viaje debe estar dentro de los 15 minutos?

Resolución

Consideraciones y definición de variables:

Para el primer caso, en cada ciudad se debe activar un centro que esté a menos de 20 minutos. Por ejemplo en la ciudad 1, el centro podría estar en la propia ciudad 1, en la ciu-

dad 2 (a 12 minutos) o en la 3 (a 20 minutos). En consecuencia si Ci es una variable que indica que se debe instalar un centro en la ciudad i cuando la variable está activa y no se debe instalar un centro en esa ciudad cuando la variable es nula, se tiene que C1+C2+C3 debe ser mayor o igual a 1. Se plantea una restricción similar para cada ciudad. Obviamente, el funcional consiste en minimizar la cantidad de centros Ci.

Formulación:

- Funcional

  MIN: $C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C6$

- Sujeto a:

  1) $C1 + C2 + C3 \geq 1$
  2) $C1 + C2 + C5 + C6 \geq 1$
  3) $C1 + C3 + C4 + C6 \geq 1$
  4) $C3 + C4 + C5 \geq 1$
  5) $C2 + C4 + C5 + C6 \geq 1$
  6) $C2 + C3 + C5 + C6 \geq 1$

- Siendo:

  Ci enteros binarios y no negativos

Solución:

```
Valor de la función objetivo

     Z)      2

     C2 = C4 = 1
     C1 = C3 = C5 = C6 = 0
```

Formulación del segundo caso:

- Funcional:

  MIN $C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C6$

- Sujeto a:

  1) $C1 + C2 \geq 1$
  2) $C1 + C2 + C6 \geq 1$
  3) $C3 + C4 \geq 1$
  4) $C3 + C4 + C5 \geq 1$
  5) $C4 + C5 + C6 \geq 1$
  6) $C2 + C5 + C6 \geq 1$

- Condiciones de las variables

  Ci enteros binarios y no negativos

Solución:

El resultado de este planteo coincide con el del anterior; es decir, conviene instalar los centros en las ciudades 2 y 4.

PROBLEMA No. 14
INDUSTRIA: SERVICIOS
SECTOR: FINANZAS
OBJETO: SELECCIÓN DE PROYECTOS

Una empresa tiene 6 proyectos de inversión en cartera, cuyos flujos netos de caja (en K$) a lo largo de 10 años se indican a continuación:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P1	-100	20	30	30	40	50	50	40	20		
P2	-300	-100	-50	0	50	100	150	300	300	100	
P3	-200	-50	0	100	100	100	100	100			
P4	-400	-100	100	100	100	150	150	150	100	50	70
P5	-150	0	30	40	50	60	50	40	40	30	40
P6	-250	-50	0	50	100	150	100	100	70	80	

Asumiendo que la tasa de interés es de 10% anual y que el objetivo es maximizar el Valor Actual Neto total, formular los programas matemáticos considerando que la inversión inicial no debe superar los k$ 1000 para las siguientes situaciones:

1. *Los flujos netos de caja de los años que se indican deben ser superiores a:*

Primer año k$ -250; Segundo año: k$ 0; Tercer año: k$ 150; Cuarto año: k$ 200; Quinto año: k$300; Sexto año: k$300; Séptimo año: k$ 300; Octavo año: k$ 200

2. *Deben emprenderse por lo menos dos de los proyectos 1, 3, 5 y 6.*
3. *Debe llevarse a cabo uno de los proyectos 1 o 3, pero no ambos.*
4. *Deben realizarse simultáneamente los proyectos 3 y 5 (o ninguno de ellos).*
5. *No se puede realizar el proyecto 2 a menos que se emprendan los proyectos 1 y 4 (ambos).*
6. *No se puede emprender el proyecto 2 a menos que se ejecute el proyecto 1 o el proyecto 4 o ambos.*
7. *Cuando se emprendan los proyectos 1 y 2 (ambos), también se debe emprender el proyecto 4.*

Resolución

Consideraciones:

En primer lugar deben calcularse los Valores Actuales Netos de cada uno de los proyectos, descontando cada valor de flujo neto al momento presente a la tasa de 0.10. El resultado es el siguiente:

	VAN
P1	$ 74.51
P2	$ 77.27
P3	$ 61.67
P4	$ 77.09
P5	$ 65.28
P6	$ 70.82

Formulación:

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Signo	RHS
Z)	74.51	77.27	61.67	77.09	65.28	70.82		MAX
A0)	100	300	200	400	150	250	≤	1000
A1)	-20	100	50	100		50	≤	250
A2)	30	-50		100	30		≥	0
A3)	30		100	100	40	50	≥	150
A4)	40	50	100	100	50	100	≥	200
A5)	50	100	100	150	60	150	≥	300
A6)	50	150	100	150	50	100	≥	300
A7)	40	300	100	150	40	100	≥	300
A8)	20	300		100	40	70	≥	200
Var.	Bin	Bin	Bin	Bin	Bin	Bin		

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

    Z)    349.55

    VARIABLE    VALOR

    P1              1
    P2              1
    P3              1
    P4              0
    P5              1
    P6              1
```

Segundo caso (presentado en la forma tradicional):

- Funcional

  MAX 74.51 P1 + 77.27 P2 + 61.67 P3 + 77.09 P4 + 65.28 P5 + 70.82 P6

- Sujeto a:

  A0) 100 P1 + 300 P2 + 200 P3 + 400 P4 + 150 P5+ 250 P6 ≤ 1000
  R2) P1 + P3 + P5 + P6 ≥ 2

- Condiciones de las variables

  Pi: Binarias

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 349.55

VARIABLES	VALOR
P1	1
P2	1
P3	1
P4	0
P5	1
P6	1

Tercer caso:

Se debe llevar a cabo uno de los dos proyectos P1 o P3, pero no ambos. Esto es, P1 + P3 = 1.

- Funcional

  MAX 74.51 P1 + 77.27 P2 + 61.67 P3 + 77.09 P4 + 65.28 P5 + 70.82 P6

- Sujeto a:

  A0) 100 P1 + 300 P2 + 200 P3 + 400 P4 + 150 P5 + 250 P6 ≤ 1000

  R3) P1 + P3 = 1

- Condiciones de las variables

  Pi: Binarias

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 294.15

VARIABLES	VALOR
P1	1
P2	1
P3	0
P4	1
P5	1
P6	0

Cuarto caso:

En este caso P3 = P5. Por lo tanto, la formulación matemática del problema es:

- Funcional

  MAX 74.51 P1 + 77.27 P2 + 61.67 P3 + 77.09 P4 + 65.28 P5 + 70.82 P6

- Sujeto a:

  A0) 100 P1 + 300 P2 + 200 P3 + 400 P4 + 150 P5 + 250 P6 ≤ 1000

  R4) P3 - P5 = 0

- Condiciones de las variables

  Pi: Binarias

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
    Z)          349.55
 VARIABLES     VALOR
    P1           1
    P2           1
    P3           1
    P4           0
    P5           1
    P6           1
```

Quinto caso:

Aquí, si el Proyecto 2 se activa, deben estar activos ambos P1 y P4. Es decir que P1 + P4 ≥ 2 P2. Luego:

- Funcional

  MAX 74.51 P1 + 77.27 P2 + 61.67 P3 + 77.09 P4 + 65.28 P5 + 70.82 P6

- Sujeto a:

  A0) 100 P1 + 300 P2 + 200 P3 + 400 P4 + 150 P5 + 250 P6 ≤ 1000

  R5) P1 + P4 - 2 P2 ≥ 0

- Condiciones de las variables

  Pi: Binarias

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
    Z)          294.15
    VARIABLES   VALOR
    P1            1
    P2            1
    P3            0
    P4            1
    P5            1
    P6            0
```

Sexto caso:

En este caso, si el Proyecto 2 está activo, debe estar activo el Proyecto 1 o el 2 o ambos. Es decir que P1 + P4 ≥ P2. Luego:

- Funcional

  MAX 74.51 P1 + 77.27 P2 + 61.67 P3 + 77.09 P4 + 65.28 P5 + 70.82 P6

- Sujeto a:

  A0) 100 P1 + 300 P2 + 200 P3 + 400 P4 + 150 P5 + 250 P6 ≤ 1000

  R6) P1 + P4 - P2 ≥ 0

- Condiciones de las variables

  Pi: Binarias

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

      Z)          349.55

   VARIABLES      VALOR
      P1            1
      P2            1
      P3            1
      P4            0
      P5            1
      P6            1
```

Séptimo caso:

La restricción se puede expresar como $P1 + P2 \leq P4 + 1$. Luego, el modelo matemático será:

- Funcional

  MAX 74.51 P1 + 77.27 P2 + 61.67 P3 + 77.09 P4 + 65.28 P5 + 70.82 P6

- Sujeto a:

  A0) $100\ P1 + 300\ P2 + 200\ P3 + 400\ P4 + 150\ P5 + 250\ P6 \leq 1000$

  R7) $P1 + P2 - P4 \leq 1$

- Condiciones de las variables

  Pi: Binarias

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

  Z)     294.15

   VARIABLES      VALOR
      P1            1
      P2            1
      P3            0
      P4            1
      P5            1
      P6            0
```

PROBLEMA No. 15
INDUSTRIA: ALIMENTOS
SECTOR: PLANEAMIENTO DE PRODUCCIÓN
OBJETO: MEZCLA Y PROGRAMACIÓN

Para la elaboración de dos alimentos A y B se utilizan los compuestos Y, V y W. Los requerimientos nutricionales de los alimentos y los aportes de cada compuesto, como así también los costos de Y, V y W se indican en la tabla.

La mezcla de los productos se lleva a cabo en una máquina que puede trabajar 24 hs por día. La mezcla no es simultánea; es decir primero se mezcla el alimento A y luego el B. El costo horario de utilización de la máquina mezcladora es de 100$.

La tasa de procesamiento de la mezcla del alimento A en la máquina es de 15 Kg por hora, mientras que la del alimento B es de 20 Kg/h.

CARACTERÍSTICA NUTRICIONAL	COMPUESTO			PRODUCTO		
	Y	V	W	Requerimiento	A	B
VALOR ENERGÉTICO (Kcal/Kg)	3500	3000	5000	Máximo	3900	4500
FIBRA (gr/Kg)	45	60	30	Mínimo	50	40
GRASAS (gr/Kg)	30	25	35	Máximo	30	33
GRASAS SATURADAS (gr/Kg)	0	0	4	Máximo	3	3
HIDRATOS DE CARBONO (gr/Kg)	150	130	50	Mínimo	70	80
				Máximo	130	140
HIERRO (mg/Kg)	40	70	50	Mínimo	45	45
CALCIO (gr/Kg)	5.7	3.3	4.1	Mínimo	3.7	3.5
VITAMINAS (UV/Kg)	20	30	20	Mínimo	22	22
COLESTEROL (mg/Kg)	0	0	12	Máximo	5	10
PROTEÍNA (gr/Kg)	130	180	100	Mínimo	140	120
COSTO ($/Kg)	7	9	5			

El tiempo de máquina no utilizado se pude vender a $150 la hora.

Una vez procesados en la máquina, los alimentos requieren un tratamiento manual realizado por operarios especializados. Cada Kg de A insume 0.5 hs de mano de obra, mientras que cada Kg de B requiere 0.4 hs. Se dispone de 150 horas hombre por día de mano de obra especializada normal a un costo de $5 por hora. Sin embargo, se pude contratar hasta 30 horas de mano de obra especializada extra a un costo de $ 7 por hora.

El producto A se vende a 35$ por Kg y tiene una demanda fija de 150 Kg por día. El excedente por encima de ese valor se puede vender a $ 28 por Kg

Por su parte, el alimento B se vende a $ 30 por Kg y tiene una demanda fija de 200 Kg por día. El excedente a estas 200 unidades se vende a $ 24 el Kg

1. Determinar un programa de mezcla, fabricación y utilización de recursos.

2. ¿Qué modificaciones habría que hacer en el modelo si el tiempo de máquina no utilizado se pude vender a $150 la hora, siempre y cuando haya más de tres horas por día disponibles para ser vendidas?

Resolución

Definición de variables:

#: Cantidad diaria a utilizar del componente # (Y, V, W)

i: Cantidad diaria a elaborar de alimento i (A y B)

#i: Cantidad diaria del componente # que integra la mezcla del alimento i

i1: Cantidad fija requerida del alimento i por día

i2: Cantidad excedente por encima de la cantidad fija del alimento i por día

HMU: Número de horas por día de utilización de la máquina mezcladora

SM: Sobrante de horas de máquina por día

HN: Número de horas hombre normales a utilizar por día

HE: Número de horas hombre extras a utilizar por día

Formulación:

- Funcional:

MAX 35 A1 + 30 B1 + 28 A2 + 24 B2 + 150 SM - 7 Y - 9 V - 5W - 100 HMU - 5HN - 7HE

- Sujeto a:

BY) -Y + YA + YB = 0
BV) -V + VA + VB = 0
BW) -W + WA + WB = 0

BA) - A + YA + VA + WA = 0
BB) - B + YB + VB + WB = 0

VEN_A) 3500 YA + 300 VA + 500 WA - 3900 A ≤ 0
VEN_B) 3500 YB + 300 VB + 500 WB - 4500 B ≤ 0

FIB_A) 45 YA + 60 VA + 30 WA - 50 A ≥ 0
FIB_B) 45 YB + 60 VB + 30 WB - 40 B ≥ 0

GRA_A) 30 YA + 25 VA + 35 WA - 30 A ≤ 0
GRA_B) 30 YB + 25 VB + 35 WB - 33 B ≤ 0

GRS_A) 4 WA - 3 A ≤ 0
GRS_B) 4 WB - 3 B ≤ 0

HCN_A) 150 YA + 130 VA + 50 WA - 70 A ≥ 0
HCN_B) 150 YB + 130 VB + 50 WB - 80 B ≥ 0

HCM_A) 150 YA + 130 VA + 50 WA - 130 A ≤ 0
HCM_B) 150 YB + 130 VB + 50 WB - 140 B ≤ 0

HIE_A) 40 YA + 70 VA + 50 WA - 45 A ≥ 0
HIE_B) 40 YB + 70 VB + 50 WB - 45 B ≥ 0

CAL_A) 5.7 YA + 3.3 VA + 4.1 WA - 3.7 A ≥ 0
CAL_B) 5.7 YB + 3.3 VB + 4.1 WB - 3.5 B ≥ 0

VIT_A) 20 YA + 30 VA + 20 WA - 22 A ≥ 0
VIT_B) 20 YB + 30 VB + 20 WB - 22 B ≥ 0

COL_A) 12 WA - 5 A ≤ 0
COL_B) 12 WB - 10 B ≤ 0

PRO_A) 130 YA + 180 VA + 100 WA - 140 A ≥ 0
PRO_B) 130 YB + 180 VB + 100 WB - 120 B ≥ 0

U_MAQ) 0.0667 A + 0.05 B - HMU = 0
D_MAQ) HMU + SM = 24

U_MO) 0.5 A + 0.4 B - HN - HE = 0
D_HN) HN ≤ 150
D_HE) HE ≤ 30

B_A) -A + A1 + A2 = 0
B_V) -B +B1 + B2 = 0

R_A) A1 = 150
R_B) B1 = 200

- Condiciones de las variables

  Todas las variables son no negativas y continuas.

Solución:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      6

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)        6834.516

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        A1       150.000000          0.000000
        B1       200.000000          0.000000
        A2         0.000000          2.828699
        B2        62.500000          0.000000
        SM         0.870000          0.000000
         Y        63.062450          0.000000
         V       195.484055          0.000000
         W       114.438202          0.000000
       HMU        23.129999          0.000000
        HN       150.000000          0.000000
        HE        30.000000          0.000000
        YA        44.186047          0.000000
        YB        18.876404          0.000000
        VA        91.860466          0.000000
        VB       103.623596          0.000000
        WA         0.000000          0.310078
        WB       114.438202          0.000000
         A       150.000000          0.000000
         B       262.500000          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       BY)         0.000000          7.000000
       BV)         0.000000          9.000000
       BW)         0.000000          5.000000
    VEN_A)    154767.437500          0.000000
    VEN_B)    232120.781250          0.000000
    FIB_A)         0.000000         -0.145736
    FIB_B)         0.000000         -0.121348
    GRA_A)       877.906982          0.000000
    GRA_B)      1500.280884          0.000000
    GRS_A)       450.000000          0.000000
    GRS_B)       329.747192          0.000000
    HCN_A)      8069.767578          0.000000
    HCN_B)      1024.438232          0.000000
    HCM_A)       930.232544          0.000000
    HCM_B)     14725.561523          0.000000
    HIE_A)      1447.674438          0.000000
    HIE_B)      1918.117920          0.000000
    CAL_A)         0.000000         -0.077519
    CAL_B)         0.000000         -0.112360
    VIT_A)       339.534882          0.000000
    VIT_B)         0.000000         -0.044944
    COL_A)       750.000000          0.000000
    COL_B)      1251.741577          0.000000
```

```
  PRO_A)      1279.069824        0.000000
  PRO_B)      1050.000000        0.000000
  U_MAQ)         0.000000      250.000000
  D_MAQ)         0.000000      150.000000
   U_MO)         0.000000       13.160112
   D_HN)         0.000000        8.160112
   D_HE)         0.000000        6.160112
    B_A)         0.000000       30.828699
    B_V)         0.000000       24.000000
    R_A)         0.000000        4.171301
    R_B)         0.000000        6.000000

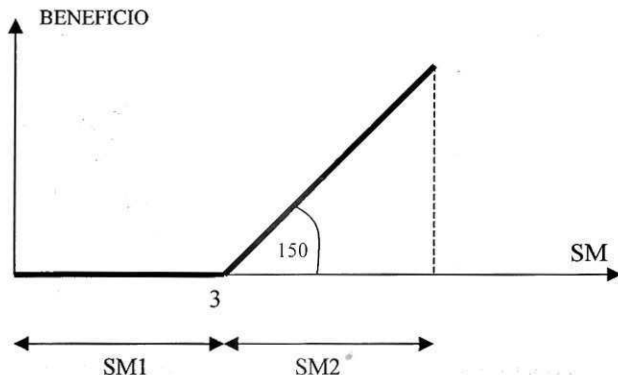
NO. ITERATIONS=         6
```

Segundo caso:

Como se observa en la solución anterior, el tiempo de máquina sobrante es de 0.87 hs por día. La segunda pregunta del problema, precisamente, establece que se pueden vender horas de máquina sobrantes, pero siempre que el sobrante sea mayor a 3 horas por día. Para formular esta situación habrá que hacer los siguientes cambios:

A la variable SM (sobrante de máquina) la podemos considerar como suma de dos variables mutuamente excluyentes SM1 y SM2, ya que la contribución a la función objetivo de la variable SM la podemos ver en el siguiente gráfico.

SM_1)	$- SM + SM1 + SM2 = 0$
SM_2)	$SM1 - 3\ I1 \leq 0$
SM_3)	$SM2 - 3\ I2 \geq 0$
SM_4)	$SM2 - 24\ I2 \leq 0$
SM_5)	$I1 + I2 \leq 1$



en donde I1 e I2 son variables binarias que permiten la habilitación de SM1 y de SM2, respectivamente.

El funcional, en consecuencia, deberá modificarse como sigue:

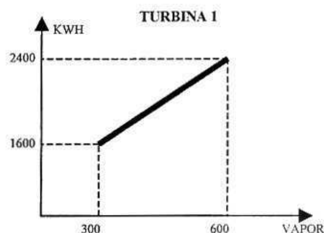
MAX 35 A1 + 30 B1 + 28 A2 + 24 B2 + 150 SM2 - 7 Y - 9 V - 5W
- 100 HMU - 5HN - 7HE

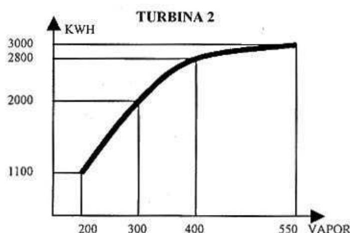
PROBLEMA No. 16
INDUSTRIA: ENERGÍA
SECTOR: GENERACIÓN
OBJETO: SELECCIÓN

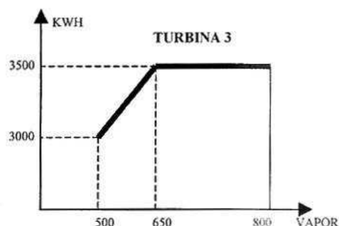
Una central eléctrica tiene cuatro calderas. Si se usa una caldera dada, se podrá producir una cantidad de vapor (dada en toneladas) que varía entre el mínimo y el máximo indicado en la tabla. Se indica también el costo para producir una tonelada de vapor en cada caldera y el costo de puesta en marcha para un día determinado.

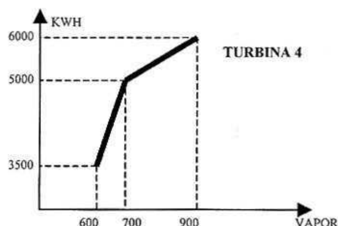
Caldera	Cantidad mínima de vapor	Cantidad máxima de vapor	Costo de encendido	Costo por tonelada
1	500	1000	$ 3000	$10
2	300	900	$ 3400	$8
3	400	800	$ 3900	$6
4	500	700	$ 2900	$11

Todo el vapor de las calderas se usa para producir energía en cuatro turbinas. En los siguientes gráficos se indican la producción de energía en KWH para cada turbina en las condiciones de operación de cada una de ellas.









El costo de encendido de las calderas y el costo de operación por tonelada de alimentación es el siguiente:

Turbina	Costo de encendido	Costo por tonelada de vapor
1	$4000	2.9
2	$2000	3.2
3	$4500	4.2
4	$500	4.0

Suponiendo que las calderas y las turbinas están apagadas al comenzar el día, formular un programa matemático que permita determinar qué calderas y qué turbinas deberían encenderse para producir como mínimo 8000 KWH de energía en un día determinado, cuáles para 10000 y cuáles para 12000.

Resolución

Definición de variables:

VCi:	Vapor generado en la caldera i
ICi:	Variable binaria para permitir la activación de la caldera i
VC:	Vapor generado en todas las calderas y utilizado en las turbinas
VTj:	Vapor utilizado en la turbina j
ITj:	Variable binaria para permitir la activación de la turbina j
Ak:	Variables continuas entre 0 y 1 de una familia de vectores para representar el régimen de trabajo de la turbina 1
Bk:	Variables continuas entre 0 y 1 de una familia de vectores para la turbina 2
Ck:	Variables continuas entre 0 y 1 de una familia de vectores para la turbina 3
Dk:	Variables continuas entre 0 y 1 de una familia de vectores para la turbina 4
ETj:	Energía producida en la turbina j

Formulación:

- Función objetivo:

MIN 3000 IC1 + 3400 IC2 + 3900 IC3 + 2900 IC4 + 4000 IT1 + 2000 IT2 + 4500 IT3 + 500 IT4 + 10 VC1 + 8 VC2 + 6 VC3 + 11 VC3 + 2.9 VT1 + 3.2 VT2 + 4.2 VT3 + 4 VT4

Sujeto a:

- Generación de vapor en las calderas:

$VC1 - 500\ IC1 \geq 0$

$VC1 - 1000\ IC1 \leq 0$

$VC2 - 300\ IC2 \geq 0$

$VC2 - 900\ IC2 \leq 0$

$VC3 - 400\ IC3 \geq 0$

$VC3 - 800\ IC3 \leq 0$

$VC4 - 500\ IC4 \geq 0$

$VC4 - 700\ IC4 \leq 0$

$VC1 + VC2 + VC3 + VC4 - VC = 0$

$VT1 + VT2 + VT3 + VT4 - VC = 0$

- Turbina 1

  $- VT1 + 300\ A1 + 600\ A2 = 0$

  $- ET1 + 1600\ A1 + 2400\ A2 = 0$

  $A1 + A2 - IT1 = 0$ (esta ecuación asegura la combinación lineal de los Aj y permite, además, activar o no la turbina 1)

- Turbina 2

  $- VT2 + 200\ B1 + 300\ B2 + 400\ B3 + 550\ B4 = 0$

  $- ET2 + 1100\ B1 + 2000\ B2 + 2800\ B3 + 3000\ B4 = 0$

  $B1 + B2 + B3 + B4 - IT2 = 0$ (esta ecuación asegura la combinación lineal de los Bj y permite, además, activar o no la turbina 2)

- Turbina 3

  $- VT3 + 500\ C1 + 650\ C2 + 800\ C3 = 0$

  $- ET3 + 3000\ C1 + 3500\ C2 + 3500\ C3 = 0$

  $C1 + C2 + C3 - IT3 = 0$ (esta ecuación asegura la combinación lineal de los Cj y permite, además, activar o no la turbina 3)

- Turbina 4

  $- VT4 + 600\ D1 + 700\ D2 + 900\ D3 = 0$

  $- ET4 + 3500\ D1 + 5000\ D2 + 6000\ D3 = 0$

  $D1 + D2 + D3 - IT4 = 0$ (esta ecuación asegura la combinación lineal de los Dj y permite, además, activar o no la turbina 4)

- Requerimiento

  $ET1 + ET2 + ET3 + ET4 \geq 8000$

Resolución:

En la tabla siguiente se indican los resultados obtenidos para los tres casos.

Si, al observar alguna de las soluciones encontradas, hubiera habido algún vector *mesh* B1 y B4 no vecinos (no ocurrió en ninguno de los casos), se habría planteado un recinto no convexo, y la solución sería incorrecta.

	8000	12.000	14.000
Z	16560	33812	42963.75
IC1	0	1	1
IC2	1	1	1
IC3	0	0	0
IC4	1	1	1
IT1	0	0	1
IT2	1	1	1
IT3	0	1	1
IT4	1	1	1
VC1	0	500	687.50
VC2	440	660	900
VC3	0	0	0
VT1	0	0	337.50
VT2	400	400	400

VT3	0	560	650
VT4	740	900	900
VC4	700	700	700
VC	1140	1860	2287.50
A1	0	0	0.875
A2	0	0	0.125
ET1	0	0	1700
B1	0	0	0
B2	0	0	0
B3	1	1	1
B4	0	0	0
ET2	2800	2800	2800
C1	0	0.60	0
C2	0	0.40	1
C3	0	0	0
ET3	0	3200	3500
D1	0	0	0
D2	0.80	0	0
D3	0.20	1	1
ET4	5200	6000	6000

A fin de permitir que se activen sólo vectores *mesh* adyacentes se deberían plantear restricciones como las que se indican a continuación.

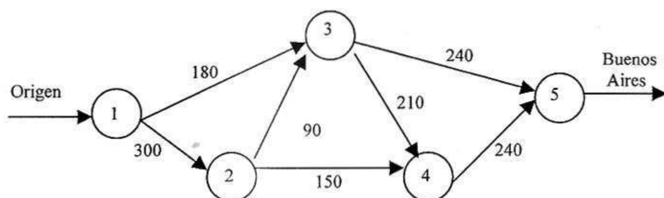
$B1 - U1 \leq 0$
$B2 - U2 \leq 0$
$B3 - U3 \leq 0$
$B4 - U4 \leq 0$
$U1 + U3 \leq 1$
$U1 + U4 \leq 1$
$U2 + U4 \leq 1$

en donde los vectores Ui son variables binarias.

De hecho, como generalmente no se puede saber *a priori* si una función no lineal es convexa o no, siempre se deberían formular restricciones como las indicadas a fin de permitir sólo la habilitación de vectores vecinos.

PROBLEMA No. 17
INDUSTRIA: ENERGÍA
SECTOR: DISTRIBUCIÓN DE GAS
OBJETO: FLUJO MÁXIMO DE REDES

Se debe transportar gas natural desde el centro de producción hasta Buenos Aires a través de una red de gasoductos. La red es la siguiente:



Los valores indicados en las flechas indican las restricciones de capacidad de cada gasoducto en miles de m^3 de gas por hora. Determinar el flujo máximo que se puede transportar.

Resolución

Definición de variables:

X: Cantidad de gas total a transportar

Xij: Cantidad de gas a transportar desde el nodo i al nodo j

Formulación:

- Funcional:

Z) MAX X

Sujeto a:

- Restricciones de balance en cada nodo:

1) $-X \quad + X12 + X13 \qquad = 0$
2) $-X12 + X23 + X24 \qquad = 0$
3) $-X13 - X23 + X34 + X35 = 0$
4) $-X24 - X34 + X45 \qquad = 0$
5) $-X35 - X45 + X \qquad = 0$

- Restricciones de capacidad del gasoducto ij:

1-2) $X12 \leq 300$
1-3) $X13 \leq 180$
2-3) $X23 \leq 90$
2-4) $X24 \leq 150$
3-4) $X34 \leq 210$
3-5) $X35 \leq 240$
4-5) $X45 \leq 240$

- Condiciones de las variables

Xij no negativas

Resolución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO:

   Z)          5460

VARIABLE       VALOR

      X          420
    X12          240
    X13          180
    X23           90
    X24          150
     X3           30
    X35          240
    X45          180
```

PROBLEMA No. 18
INDUSTRIA: SERVICIOS DE ENTRETENIMIENTO
SECTOR: DISCOGRÁFICO
OBJETO: SELECCIÓN

Una banda de rock ha grabado un conjunto de canciones y la producción debe seleccionar cuáles van a formar parte del nuevo compacto. Los temas se han clasificado en tres tipos y se les ha asignado un coeficiente que refleja el interés que se tiene para que la canción figure en el CD. Esta información, junto con la duración en minutos de cada tema se da en la tabla. Entre cada tema hay un tiempo de separación de 0.1 minuto.

Formular un modelo que permita determinar qué canciones incluir, teniendo en cuenta que se desea maximizar la puntuación total de las canciones elegidas y que deben mantenerse los siguientes criterios:

- ✓ *Los temas deben ocupar entre 40 y 50 minutos.*
- ✓ *Debe haber al menos una canción del tipo B y otra del tipo C.*
- ✓ *Debe haber al menos dos y no más de cuatro temas del tipo A.*
- ✓ *Si figura la canción 2 no puede figurar la 4.*
- ✓ *Si se incluyen las canciones 1 ó 10 debe figurar el tema 8.*
- ✓ *Si figuran las canciones 4 y 9 no puede figurar la 12.*
- ✓ *Si se incluye el tema 4 o el 6 no puede figurar el 15.*

CANCIÓN	TIPO	DURACIÓN	PUNTUACIÓN
1	A	2.5	2
2	A	7.0	10
3	A	6.1	9
4	A	4.2	5
5	A	5.1	4
6	B	7.4	8
7	B	6.8	11
8	B	3.5	1
9	B	4.3	7
10	C	3.0	5
11	C	4.0	6
12	C	3.9	2
13	A	5.6	4
14	B	3.7	5
15	C	4.4	6

Formular otro modelo que permita elegir los temas que se incluirán si el objetivo primario es que la duración total del compacto sea de 45 minutos, el objetivo secundario que el CD tenga la mayor cantidad de temas posible y, finalmente, que se incluyan las canciones 2, 3, 6 y 7. No considerar las restricciones impuestas para el caso anterior.

Para este último caso, indicar cómo se modificaría la formulación si la meta primaria fuera que la duración total esté comprendida entre 45 y 46 minutos.

Indicar cómo se formularía la meta de que la cantidad de canciones de tipo A sea superior a la cantidad de canciones de tipo C.

Resolución

Definición de variables:

Ci: Variable binaria que asume el valor 1 cuando se incluye a la canción i.

N: Cantidad total de temas a incluir en el compacto

M: Cantidad de intervalos entre temas

DT: Duración total del CD

Formulación:

- Objetivo

Z) MAX 2 C1 + 10 C2 + 9 C3 + 5 C4 + 4 C5 + 8 C6 + 11 C7 + 1 C8 + 7 C9 + 5 C10 + 6 C11 + 2 C12 + 6 C13 + 5 C14 + 6 C15

Sujeto a:

- Restricciones de balance de cantidad de temas

BN) - N + C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C6 + C7 + C8 + C9 + C10 + C11 + C12 + C13 + C14 + C15 = 0

BM) N - M = 1

- Restricciones de duración total

BD) - DT + 2.5 C1 + 7.0 C2 + 6.1 C3 + 4.2 C4 + 5.1 C5 + 7.4 C6 + 6.8 C7 + 3.5 C8 + 4.3 C9 + 3.0 C10 + 4.0 C11 + 3.9 C12 + 5.6 C13 + 3.7 C14 + 4.4 C15 + 0.1 M = 0

DMIN) DT $\geq$ 40

DMAX) DT $\leq$ 50

- Por lo menos un tema del tipo B y otro del tipo C

R1) C6 + C7 + C8 + C9 + C14 $\geq$ 1

R2) C10 + C11 + C12 + C15 $\geq$ 1

- Por lo menos dos y no más de cuatro canciones tipo A

R3) C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C13 $\geq$ 2

R4) C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C13 $\leq$ 4

- Si figura 2 no puede figuar 4

  R5) $C2 + C4 \leq 1$

- Si figura 1 o 10, se debe incluir 8

  R6) $C1 + C10 - 2\ C8 \leq 0$

- Si están 4 y 9, no puede figurar 12

  R7) $C4 + C9 + C12 \leq 2$

- Si se incluyen 4 ó 6, no puede figurar 15

  Hay dos formas:

  La primera es formular las dos inecuaciones:

  $C4 + C15 \leq 1$ *y* $C6 + C15 \leq 1$.

  La segunda forma es plantear la inecuación que surge de sumar ambas, y que es la siguiente:

  R8) $C4 + C\ 6 + 2\ C15 \leq 2$

- Condiciones de las variables:

  Ci binarias. El resto, no negativas.

Resolución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
Z)         66.00
```

VARIABLE	VALOR
C1	0.00
C2	1.00
C3	1.00
C4	0.00
C5	0.00
C6	0.00
C7	1.00
C8	1.00
C9	1.00
C10	1.00
C11	1.00
C12	0.00
C13	1.00
C14	1.00
C15	1.00
N	10.00
M	9.00
DT	49.30

Para formular y resolver el segundo caso llamaremos:

D1MENOS: Variable de desviación que mide en cuántos minutos no se alcanza la meta de los 45 minutos de duración total.

D1MÁS: Variable de desviación que mide en cuántos minutos se excede la meta de 45 minutos de duración total.

D2MENOS: Variable de desviación que mide en cuántas canciones no se alcanza la meta de incluir 15 canciones, es decir, que el CD tenga la mayor cantidad posible de temas.

D3MENOS: Variable de desviación que mide en cuánto no se alcanza la meta de tener las cuatro canciones (canciones 2, 3, 6 y 7).

D3MÁS: Variable de desviación que mide en cuánto se supera la meta de tener las cuatro canciones (canciones 2, 3, 6 y 7).

- Objetivo

  Z) MIN 10.000 D1MENOS + 10.000 D1MÁS + 100 D2MENOS + D3MENOS + D3MÁS

Sujeto a:

- Restricciones de tiempo (quedan igual que para el caso anterior)

  BD) - DT + 2.5 C1 + 7.0 C2 + 6.1 C3 + 4.2 C4 + 5.1 C5 + 7.4 C6 + 6.8 C7 + 3.5 C8 + 4.3 C9 + 3.0 C10 + 4.0 C11 + 3.9 C12 + 5.6 C13 + 3.7 C14 + 4.4 C15 + 0.1 M = 0

  BN) - N + C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C6 + C7 + C8 + C9 + C10 + C11 + C12 + C13 + C14 + C15 = 0

  BM) N - M = 1

- Meta 1:

  M1) DT + D1MENOS - D1MÁS = 45

- Meta 2:

  M2) N + D2MENOS = 15

- Meta 3:

  M2) C2 + C3 + C6 + C7 + D3MENOS - D3MÁS = 4

Resolución:

VARIABLE	VALOR
C1	1.00
C2	0.00
C3	1.00
C4	0.00
C5	0.00
C6	0.00
C7	1.00
C8	1.00
C9	1.00
C10	1.00
C11	1.00
C12	1.00
C13	1.00
C14	0.00
C15	1.00
D1MENOS	0.00
D1MÁS	0.00
D2MENOS	5.00
D3MENOS	2.00
D3MÁS	0.00

DT	45.00
M	9.00
N	10.00

Se observa que sólo se cumple la meta 1. Con respecto a la segunda meta se incluyen sólo 10 temas de los 15. Y, en relación a la tercera meta, no se incluyen dos de los 4 temas deseados.

La modificación que debería hacerse si la meta principal fuera que la duración esté en un valor comprendido entre 45 y 46 minutos se debe hacer sobre la restricción M1). En lugar de ella, se formulan las siguientes restricciones:

- Meta 1:

  M1-1) $DT - D1MENOS \geq 45$

  M1-2) $DT + D1MÁS \leq 46$

  A continuación se muestra la solución a este caso.

Resolución:

VARIABLE	VALOR
C1	1.00
C2	0.00
C3	1.00
C4	1.00
C5	1.00
C6	0.00
C7	0.00
C8	1.00
C9	1.00
C10	1.00
C11	1.00
C12	1.00
C13	0.00
C14	1.00
C15	1.00
D1MENOS	0.00
D1MÁS	0.00
D2MENOS	4.00
D3MENOS	3.00
D3MÁS	0.00
DT	45.70
M	10.00
N	11.00

En este caso, al flexibilizar el objetivo de duración total, se alcanza también la primera meta y se mejora la segunda meta en una canción (aunque la tercera meta empeora un poco).

Finalmente, para plantear la meta de que la cantidad de canciones de A sea superior a la cantidad de canciones de C, se pueden definir las siguientes variables:

A: Cantidad de canciones de tipo A contenidas en el CD.
C: Cantidad de canciones de tipo C contenidas en el CD.

Las restricciones que se pueden agregar al problema serían:

$$-A + C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C13 = 0$$

$$-C + C10 + C11 + C12 + C15 = 0$$

Luego, la restricción de meta correspondiente será:

$$A + d_A^- - d_A^+ - C = 0$$

en donde:

d_A^- es la cantidad de canciones de tipo A que no alcanza la meta de incluir la misma cantidad de canciones de tipo C, y

d_A^+ es la cantidad de canciones de tipo A que no alcanza la meta de incluir la misma cantidad de canciones de tipo C.

La función objetivo deberá afectar a la variable de desviación d_A^- a fin de lograr esa meta.

PROBLEMA No. 19
INDUSTRIA: PACKAGING
SECTOR: INGENIERÍA DE PRODUCTO
OBJETO: ELECCIÓN

Determinar cómo cargar una caja a fin de maximizar el beneficio sabiendo que puede soportar 8 Kg de peso. Hay cuatro productos que podrían introducirse en la caja, que dejan un beneficio diferente cada uno de ellos. Los pesos y los beneficios de los productos son los siguientes:

Producto	Peso (Kg)	Beneficio ($)
A	4	11
B	3	9
C	2	8
D	5	15

Definición de variables:

Ii: Variables binarias que se activan cuando el producto i se introduce en la caja y no se activa en caso contrario.

Formulación:

- Objetivo:

MAX $11\ I_1 + 9\ I_2 + 8\ I_3 + 15\ I_4$

Sujeto a:

- Restricción de peso:

PESO) $4\ I_1 + 3\ I_2 + 2\ I_3 + 5\ I_4 \leq 8$

- Condiciones de las variables:

I_i: enteras binarias

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 24.00

VARIABLE	VALOR
I1	0.00
I2	1.00
I3	0.00
I4	1.00

PROBLEMA No. 20
INDUSTRIA: PETROLEO
SECTOR: PRODUCCIÓN
OBJETO: PROGRAMACIÓN

Una refinería de petróleo está constituida únicamente por 2 plantas: una unidad de destilación primaria (Pipe Still) y una unidad de Craqueo (Cracking Catalítico).

La refinería puede procesar 6 crudos distintos en su unidad de destilación, de la cual salen cuatro productos intermedios: Nafta Virgen, Diesel Oil Virgen, Gas Oil Pesado y Crudo Reducido.

El Gas Oil Pesado se usa como alimentación del Cracking Catalítico, en el que a su vez se produce Nafta Catalítica y Diesel Oil Catalítico. El Cracking Catalítico también puede alimentarse con diesel Oil Virgen.

Todos los productos intermedios se mezclan convenientemente de manera que los productos finales a obtenerse cumplan con las especificaciones comerciales. Estos productos son: Nafta, Diesel Oil y Fuel Oil.

1. *Se desea conocer cuál es la forma en que debe operarse la refinería a fin de maximizar su ganancia. Los datos de capacidades de planta, disponibilidades de crudo y requerimientos de productos se indican en miles de barriles por mes (Mb/mes) y los datos económicos en pesos por barril ($/b)*

PLANTA	Capacidad	Costo Operativo
Pipe Still (PS)	500	0.40
Cracking Catalítico (CC)	395	0.25

CRUDOS	Disponibilidad	Costo Unitario
Santa Cruz (SAC)	120	27
Tierra de Fuego (TDF)	120	25
Chubut (CHU)	150	23
Salta (SAL)	110	22
Neuquén (NEU)	150	20

RENDIMIENTO DE CRUDOS	SAC	TDF	CHU	SAL	NEU
Nafta Virgen (NFV)	0.22	0.20	0.15	0.08	0.03
Diesel Oil Virgen (DOV)	0.28	0.26	0.30	0.26	0.28
Gas Oil Pesado (GOP)	0.40	0.37	0.35	0.30	0.32
Crudo Reducido (CRR)	0.08	0.15	0.18	0.24	0.35
TOTAL	**0.98**	**0.98**	**0.98**	**0.98**	**0.98**

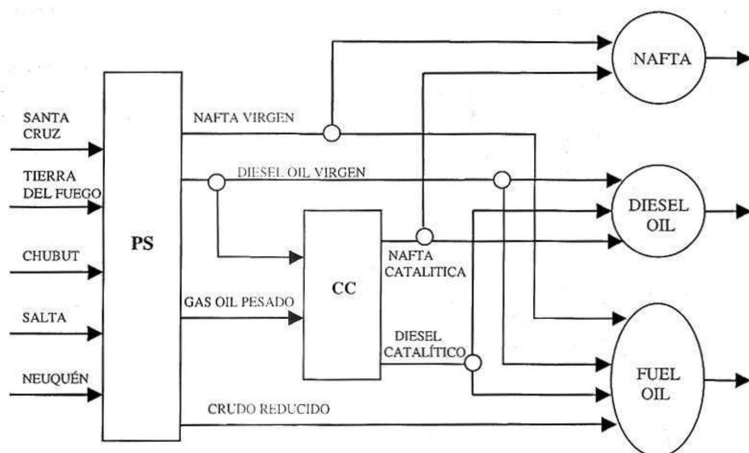
RENDIMIENTOS DEL CC	DOV	GOP
Nafta Catalítica (NCC)	0.25	0.55
Diesel Catalítico (DCC)	0.85	0.60
TOTAL	1.10	1.15

PRODUCTOS	REQUER. MÍNIMO	REQUER. MÁXIMO	PRECIO VENTA
NAFTA (NF)	150	350	35
DIESEL OIL (DO)	150	350	30
FUEL OIL (FO)	0	400	24

NAFTAS	NÚMERO DE OCTANOS
NAFTA VIRGEN (NV)	59
NAFTA CATALÍTICA (NCC)	98
NAFTA	80 (Mínimo requerido)

FUEL OIL	VISCOSIDAD(VBN)
CRUDO REDUCIDO (CRR)	14
DIESEL OIL VIRGEN (DOV)	42
DIESEL OIL CATALÍTICO (DCC)	52
NAFTA VIRGEN (NFV)	60
FUEL OIL (FO)	21 (Mínimo requerido)

DIESEL OIL
La mezcla de Diesel Oil puede contener como máximo un 10% de nafta catalítica por limitación de "flash point".



2. *Cómo se formularía el problema si se pudieran preparar dos tipos de naftas, nafta común (NC) y nafta extra (NE), con los requerimientos y parámetros que se indican en la tabla. Además, la capacidad de la torre de destilación se puede aumentar en 200 Mbarriles por día.*

NAFTA	REQUER. MÍNIMO	REQUER. MÁXIMO	PRECIO DE VENTA	NRO. MÍNIMO DE OCTANOS
NC	80	150	35	80
NE	70	200	40	88

Resolución

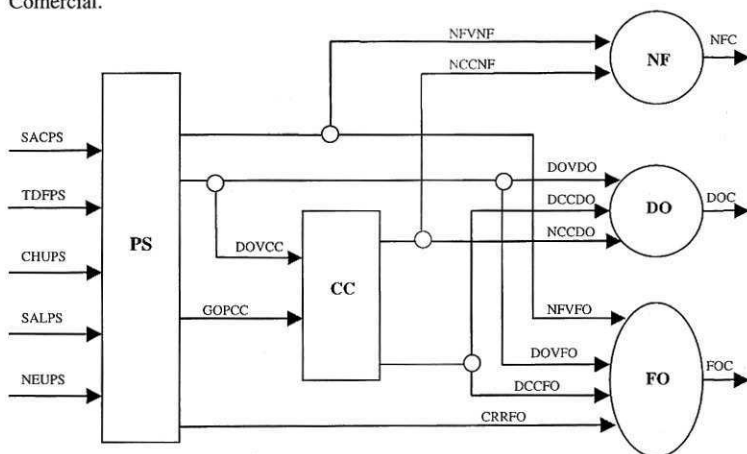
Definición de variables:

Se utilizará la siguiente notación:

Las tres primeras posiciones se refieren al producto, y las dos posiciones siguientes al destino (planta o blending) a donde se dirige el producto.

- Crudos: SAC, TDF, CHU, SAL, NEU
- Productos: NFC, DOC, FOC,
- Intermedios: NFV, DOV, GOP, CRR, NCC, DCC
- Otros objetos: APS (alimentación al PS), ACC (alimentación al CC)
- Plantas y Pools: PS, CC, NF, FO, DO

Por ejemplo: NEUPS es el crudo de Neuquén que se procesa en el Pipe Still, GOPCC es el Gas Oil Pesado que se procesa en el Cráquing Catalítico, NFVNF es la Nafta Virgen que va al *pool* de Nafta, NCC es la Nafta Catalítica que va al *pool* de Nafta, etcétera. Con los productos terminados, como no tienen un destino final, se utiliza sólo las tres primeras posiciones. Así, DOC es Diese Oil Comercial, NFC es Nafta Comercial y FOC es Fuel Oil Comercial.



Para la denominación de las restricciones se tomará la siguiente convención:
a) Los 4 primeros caracteres para denotar el recurso o requerimiento:

TOT_: Totalizador

DIS_: Disponibilidad

CAP_: Capacidad

BAL_: Balance

REQX: Requerimiento máximo volumétrico

REQN: Requerimiento mínimo volumétrico

CAL_: Requerimiento de calidad

b) Los siguientes tres caracteres, para indicar el objeto de la restricción (crudo, producto, planta, etc.)

Formulación:

- Objetivo

MAX 35 NFC + 30 DOC + 24 FOC - 27 SACPS - 25 TDFPS - 23 CHUPS - 22 SALPS - 20 NEUPS - 0.4 APS - 0.25 ACC

Sujeto a:

TOT_CRU)	SACPS + TDFPS + CHUPS + SALPS + NEUPS - APS = 0
CAP_PS)	APS $\leq$ 500
DIS_SAC)	SACPS $\leq$ 120
DIS_TDF)	TDFPS $\leq$ 120
DIS_CHU)	CHUPS $\leq$ 150
DIS_SAL)	SALPS $\leq$ 110
DIS_NEU)	NEUPS $\leq$ 150
BAL_NFV)	0.22SACPS + 0.20TDFPS + 0.15CHUPS + 0.08SALPS + 0.03NEUPS - NFVNF - NFVFO = 0
BAL_DOV)	0.28SACPS + 0.26TDFPS + 0.30CHUPS + 0.26SALPS + 0.28NEUPS - DOVCC - DOVDO - DOVFO = 0
BAL_GOP)	0.40SACPS + 0.37TDFPS + 0.35CHUPS + 0.30SALPS + 0.32NEUPS - GOPCC = 0
BAL_CRR)	0.08SACPS + 0.15TDFPS + 0.18CHUPS + 0.24SALPS + 0.35NEUPS - CRRFO = 0
TOT_ACC)	DOVCC + GOPCC - ACC = 0
CAP_CC)	ACC $\leq$ 395
BAL_NCC)	0.25DOVCC + 0.55GOPCC - NCCNF - NCCDO = 0
BAL_DCC)	0.85DOVCC + 0.60GOPCC - DCCDO - DCCFO = 0
BAL_NF)	NFVNF + NCCNF - NFC = 0
CAL_NF)	59NFVNF + 98NCCNF - 80NFC $\geq$ 0
REQNNF)	NFC $\geq$ 150
REQXNF)	NFC $\leq$ 350
BAL_DO)	DOVDO + DCCDO + NCCDO - DOC = 0
CAL_DO)	NCCDO - 0.10DOC $\leq$ 0
REQNDO)	DOC $\geq$ 150
REQXDO)	DOC $\leq$ 350
BAL_FO)	NFVFO + DOVFO + DCCFO + CRRFO - FOC = 0
CAL_FO)	60 NFVFO + 42DOVFO + 52DCCFO + 14CRRFO - 21FOC $\geq$ 0
REQXFO)	FOC $\leq$ 400

Resolución:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      19

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

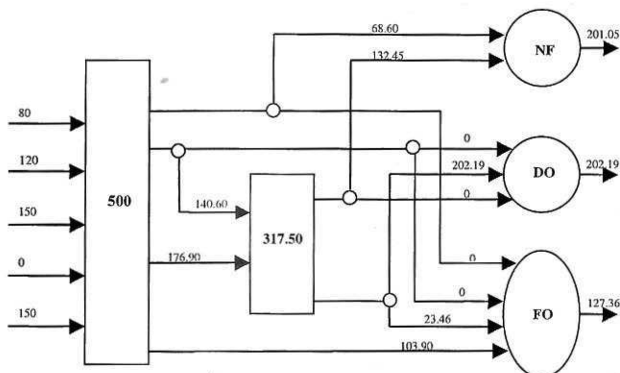
Z)       4269.532
```

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
NFC	201.044998	0.000000
DOC	202.188705	0.000000
FOC	127.361290	0.000000
SACPS	80.0000000	0.000000
TDFPS	120.000000	0.000000
CHUPS	150.000000	0.000000
SALPS	0.00000000	0.656774
NEUPS	150.000000	0.000000
APS	500.000000	0.000000
ACC	317.500000	0.000000
NFVNF	68.5999980	0.000000
NFVFO	0.00000000	3.451613
DOVCC	140.600006	0.000000
DOVDO	0.00000000	4.000000
DOVFO	0.00000000	5.935484
GOPCC	176.899994	0.000000
CRRFO	103.900002	0.000000
NCCNF	132.445007	0.000000
NCCDO	0.00000000	5.000000
DCCDO	202.188705	0.000000
DCCFO	23.4612900	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
TOT_CRU)	0.000000	6.83161300
CAP_PS)	0.000000	6.43161300
DIS_SAC)	0.000000	0.00000000
DIS_TDF)	0.000000	1.09516100
DIS_CHU)	0.000000	2.64451600
DIS_SAL)	110.0000	0.00000000
DIS_NEU)	0.000000	3.50419400
BAL_NFV)	0.000000	-35.000000
BAL_DOV)	0.000000	-34.000000
BAL_GOP)	0.000000	-37.000000
BAL_CRR)	0.000000	-22.645161
TOT_ACC)	0.000000	0.25000000
CAP_CC)	77.50000	0.00000000
BAL_NCC)	0.000000	-35.000000
BAL_DCC)	0.000000	-30.000000
BAL_NF)	0.000000	-35.000000
CAL_NF)	943.4100	0.00000000
REQNNF)	51.04500	0.00000000
REQXNF)	148.9550	0.00000000
BAL_DO)	0.000000	-30.000000
CAL_DO)	20.21887	0.00000000
REQNDO)	52.18871	0.00000000
REQXDO)	147.8113	0.00000000
BAL_FO)	0.000000	-19.935484
CAL_FO)	0.000000	-0.1935480
REQXFO)	272.6387	0.00000000

```
NO. ITERATIONS =      19
```

Este resultado se puede indicar sobre el gráfico. Observamos que la capacidad de destilación es muy limitante. Sin embargo, el Cráquing Catalítico no está completo.



- Suponiendo ahora que se pueden preparar dos tipos de naftas, nafta común (NC) y nafta extra (NE) y que se modifica la capacidad de la torre de destilación en 200 Mbarriles por día, la nueva formulación del problema sería la siguiente:

MAX 40 NFE + 35 NFC + 30 DOC + 24 FOC - 27 SACPS - 25 TDFPS
- 23 CHUPS - 22 SALPS - 20 NEUPS - 0.4 APS - 0.25 ACC

Sujeto a:

TOT_CRU) SACPS + TDFPS + CHUPS + SALPS + NEUPS - APS = 0

CAP_PS) APS ≤ 700

DIS_SAC) SACPS ≤ 120

DIS_TDF) TDFPS ≤ 120

DIS_CHU) CHUPS ≤ 150

DIS_SAL) SALPS ≤ 110

DIS_NEU) NEUPS ≤ 150

BAL_NFV) 0.22 SACPS + 0.20 TDFPS + 0.15 CHUPS + 0.08 SALPS
+ 0.03 NEUPS - NFVNC - NFVNE - NFVFO = 0

BAL_DOV) 0.28 SACPS + 0.26 TDFPS + 0.30 CHUPS + 0.26 SALPS
+ 0.28 NEUPS - DOVCC - DOVDO - DOVFO = 0

BAL_GOP) 0.40 SACPS + 0.37 TDFPS + 0.35 CHUPS + 0.30 SALPS
+ 0.32 NEUPS - GOPCC = 0

BAL_CRR) 0.08 SACPS + 0.15 TDFPS + 0.18 CHUPS + 0.24 SALPS
+ 0.35 NEUPS - CRRFO = 0

TOT_ACC) DOVCC + GOPCC - ACC = 0

CAP_CC) ACC ≤ 395

BAL_NCC)	0.25DOVCC + 0.55GOPCC - NCCNC - NCCNE - NCCDO = 0
BAL_DCC)	0.85DOVCC + 0.60GOPCC - DCCDO - DCCFO = 0
BAL_NC)	NFVNC + NCCNC - NFC = 0
BAL_NE)	NFVNE + NCCNE - NFE = 0
CAL_NC)	59NFVNF + 98NCCNF - 80NFC ≥ 0
CAL_NE)	59NFVNE + 98NCCNE - 88NFE ≥ 0
REQNNC)	NFC ≥ 80
REQNNE)	NFE ≥ 70
REQXNC)	NFC ≤ 150
REQXNE)	NFE ≤ 200
BAL_DO)	DOVDO + DCCDO + NCCDO - DOC = 0
CAL_DO)	NCCDO - 0.10DOC ≤ 0
REQNDO)	DOC ≥ 150
REQXDO)	DOC ≤ 350
BAL_FO)	NFVFO + DOVFO + DCCFO + CRRFO - FOC = 0
CAL_FO)	60NFVFO + 42DOVFO + 52DCCFO + 14CRRFO - 21FOC ≥ 0
REQXFO)	FOC ≤ 400

Solución:

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

         Z)        5980.429
```

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
NFE	172.720001	0.000000
NFC	80.000000	0.000000
DOC	260.429840	0.000000
FOC	163.645157	0.000000
SACPS	120.000000	0.000000
TDFPS	120.000000	0.000000
CHUPS	150.000000	0.000000
SALPS	110.000000	0.000000
NEUPS	150.000000	0.000000
APS	650.000000	0.000000
ACC	395.000000	0.000000
NFVNC	41.912819	0.000000
NFVNE	44.287178	0.000000
NFVFO	0.000000	8.451612
DOVCC	169.100006	0.000000
DOVDO	11.300000	0.000000
DOVFO	0.000000	1.935484
GOPCC	225.899994	0.000000
CRRFO	133.500000	0.000000
NCCNC	38.087181	0.000000
NCCNE	128.432816	0.000000

NCCDO	0.000000	10.000000
DCCDO	249.129837	0.000000
DCCFO	30.145161	0.000000
NFVNF	0.000000	0.000000
NCCNF	65.306122	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
TOT_CRU)	0.000000	0.400000
CAP_PS)	50.000000	0.000000
DIS_SAC)	0.000000	5.411613
DIS_TDF)	0.000000	6.561774
DIS_CHU)	0.000000	7.751129
DIS_SAL)	0.000000	4.384839
DIS_NEU)	0.000000	8.165807
BAL_NFV)	0.000000	-40.000000
BAL_DOV)	0.000000	-30.000000
BAL_GOP)	0.000000	-34.500000
BAL_CRR)	0.000000	-22.645161
TOT_ACC)	0.000000	5.500000
CAP_CC)	0.000000	5.250000
BAL_NCC)	0.000000	-40.000000
BAL_DCC)	0.000000	-30.000000
BAL_NC)	0.000000	-40.000000
BAL_NE)	0.000000	-40.000000
CAL_NC)	0.000000	0.000000
CAL_NE)	0.000000	0.000000
REQNNC)	0.000000	-5.000000
REQNNE)	102.720001	0.000000
REQXNC)	70.000000	0.000000
REQXNE)	27.280001	0.000000
BAL_DO)	0.000000	-30.000000
CAL_DO)	26.042984	0.000000
REQNDO)	110.429840	0.000000
REQXDO)	89.570160	0.000000
BAL_FO)	0.000000	-19.935484
CAL_FO)	0.000000	-0.193548
REQXFO)	236.354843	0.000000

PROBLEMA No. 21
INDUSTRIA: SERVICIOS
SECTOR: RECURSOS HUMANOS
OBJETO: PROGRAMACIÓN DE PERSONAL

Una empresa de servicios que brinda asistencia telefónica requiere la cantidad de operadores en distintas franjas horarias que se indica en la tabla.

Cada operador trabaja 8 horas, y los turnos comienzan a las horas pares (es decir a las 0:00 hs, 2:00 hs, 4:00., etc.).

Los operaradores que comienzan su turno a las 6:00 y a las 14:00 perciben un 10% adicional con respecto al sueldo base, los que comienzas a las 4:00, 16:00 y a las 18:00 perciben un 25% de sueldo adicional, mientras que los que comienzan su turno a las 00:00, 02:00, 20:00 y 22:00 reciben un 40% adicional.

Determinar la cantidad de operadores que debe empezar cada turno.

Franja horaria	Cantidad mínima requerida
8:00 - 10:00	12
10:00 - 12:00	16
12:00 - 14:00	10
14:00 - 16:00	11
16:00 - 18:00	16
18:00 - 20:00	9
20:00 - 22:00	8
22:00 - 24:00	6
0:00 - 2:00	4
2:00 - 4:00	2
4:00 - 6:00	3
6:00 - 8:00	7

Resolución

Definición de variables:

E0: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 0:00 hs.

E2: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 2:00 hs.

E4: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 4:00 hs.

E6: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 6:00 hs.

E8: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 8:00 hs.

E10: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 10:00 hs.

E12: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 12:00 hs.

E14: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 14:00 hs.

E16: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 16:00 hs.

E18: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 18:00 hs.

E20: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 20:00 hs.

E22: Cantidad de operarios que comienzan su turno a las 22:00 hs.

Formulación:

	E0	E2	E4	E6	E8	E10	E12	E14	E16	E18	E20	E22		RHS
Z)	1.4	1.4	1.25	1.10	1	1	1	1.10	1.25	1.25	1.4	1.4		MIN
0)	1									1	1	1	≥	4
2)	1	1									1	1	≥	2
4)	1	1	1									1	≥	3
6)	1	1	1	1									≥	7
8)		1	1	1	1								≥	12
10)			1	1	1	1							≥	16
12)				1	1	1	1						≥	10
14)					1	1	1	1					≥	11
16)						1	1	1	1				≥	16
18)							1	1	1	1			≥	9
20)								1	1	1	1		≥	8
22)									1	1	1	1	≥	6
	EP	EP	EP	EP	EP	EP	EP	EP	EP	EP	EP	EP		

EP: Significa Entera Positiva

Solución:

El resultado de este problema, realizado con WINQSB, se muestra a continuación con los reportes de dicho programa (traducidos al castellano).

En la primera tabla se puede observar el nivel de actividad asumido por las variables en la solución óptima, como así también el rango de validez de los coeficientes de dichas variables que afectan al funcional.

En la segunda tabla se indican los valores duales del problema (es decir, valores marginales y costos de oportunidad). También se informa el rango de los términos independientes dentro del cual los valores de las variables duales no se modifican

INFORME COMBINADO DE VARIABLES DIRECTAS Y RANGO DE VALIDEZ DE LA SOLUCIÓN							
Variable de decisión	Valor óptimo de la varibale	Contribución a función objetivo c(i)	Contribución total al objetivo	Costo de oportunidad	Estado de la variable	Decremento Admisible c(i)	Incremento admisible c(i)
E0	0	1.40	0	0.05	no básica	1.35	M
E2	0	1.40	0	0.05	no básica	1.35	M
E4	1	1.25	1.25	0	básica	1.2	1.35
E6	6	1.10	6.6	0	básica	1.0	1.15
E8	5	1.00	5.0	0	básica	0.95	1.1
E10	9	1.00	9.0	0	básica	0.95	1.0
E12	1	1.00	1.0	0	básica	1.0	1.1
E14	4	1.10	4.4	0	básica	1.0	1.15
E16	2	1.25	2.5	0	básica	1.2	2.25
E18	2	1.25	2.5	0	básica	1.2	1.35
E20	0	1.40	0	0.05	no básica	1.35	M
E22	2	1.40	2.8	0	básica	1.3	1.45
Valor de la función objetivo (Min.) = 35.05							

INFORME COMBINADO DE VARIABLES DUALES Y RANGO DE VALIDEZ DE LA SOLUCIÓN						
Restricción	Signo	Valor	RHS	Valor marginal	Decremento admisible de RHS	Incremento Admisible de RHS
0	≥	4	4	1	2	6
2	≥	2	2	0.1	0	3
4	≥	3	3	0.15	2	9
6	≥	7	7	0.10	1	12
8	≥	12	12	1	7	M
10	≥	21	16	0	-M	21
12	≥	21	10	0	-M	21
14	≥	19	11	0	-M	19
16	≥	16	16	1	11	M
18	≥	9	9	0	8	14
20	≥	8	8	0.10	4	9
22	≥	6	6	0.15	4	10

PROBLEMA No. 22
INDUSTRIA: AGRICULTURA
SECTOR: ADMINISTRACIÓN DE CAMPO
OBJETO: PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES

Se desea programar las actividades de una estancia de 6000 Ha. Las alternativas son cultivar A, B, C, D y E, comprar B, C, D, E, F o G, criar ganado y producir leche. La información para los distintos tipos de cultivo se indica en la tabla.

Parte del campo se puede utilizar para criar terneros. Los terneros cuestan $130 y se venden a $ 300 al finalizar el período. El requerimiento de cada ternero es el siguiente: 18 horas de mano de obra, 0.2 Ha de campo y 800 Kg de B o 700 Kg de C. Actualmente no se cuenta con ningún ternero.

	A	B	C	D	E	F	G
Mano de obra requerida por Ha	0.9	2.2	1.9	2.0	2.5	–	–
Producción (en Tn por Ha	0.10	0.35	0.23	0.25	0.30	–	–
Mano de obra requerida por Tn	0.002	0.02	0.01	0.03	0.02	–	–
Costo de producción ($/Ha)	20	250	260	290	270	–	–
Costo de producción ($/Tn)	0.3	5	6	7	5	–	–
Precio de venta ($/Tn)	–	460	390	440	500	–	–
Precio de adquisición ($/Tn)	–	520	440	590	540	400	410

Cada vaca lechera requiere 35 horas de mano de obra y 1900 Kg de alimento compuesto por A, B, C, D, E, F y G. Cada Kg de alimento requiere como mínimo 30 unidades de fibra, 25 de proteina, 1200 de energía metabólica, 0.4 de calcio y 0.02 de fósforo. Cada Kg de cultivo componente aporta las siguientes cantidades de unidades de los distintos requerimientos:

	A	B	C	D	E	F	G
FIBRA	15	35	25	25	32	29	39
PROTEINA	10	20	30	24	29	22	24
ENERGÍA	640	1240	1100	1200	1250	950	1150
CALCIO	0.05	0.5	0.4	0.3	0.6	0.1	0.3
FÓSFORO	0.01	0.03	0.02	0.03	0.03	0.01	0.03

Se puede suponer que los cultivos A, B, C, D y E que se dedican a la alimentación del ganado están disponibles en stock. Sin embargo, se debe reponer la misma cantidad utilizada con este objeto, para que quede almacenada y disponible para el período siguiente.

Una vaca produce 15000 litros de leche con 3.5 % de grasa butirosa. El litro de leche se vende a $0.2. Actualmente, el tambo de la estancia tiene 100 vacas, pero al principio de la temporada se pueden adquirir más a razón de $450 cada una o venderlas a $400. El requerimiento máximo de leche por temporada, es de 2500000 litros, pero hay un compromiso de entregar por lo menos 1000000 de litros.

Por cada litro de leche, se requiere en el tambo 0.001 hora de mano de obra.

Se puede utilizar mano de obra experimentada, a un costo de 9$ por hora o sin experiencia a 5$. Cada hora de mano de obra sin experiencia requiere 0.2 hs de supervisión, mientras que la mano de hora experimentada requiere 0.02 hs. de supervisión. Se dispone de 4000 horas de supervisión y cada una cuesta $15. Existe también una limitación de 20000 horas por período de mano de obra experimentada.

Se supone que un peón experimentado tiene un rendimiento de 90%, mientras que un peón sin experiencia tiene un rendimiento de 70%. Por su parte, la hora de supervisión es aprovechada en un 100%.

La estancia tiene un límite de fondos de $750000 para solventar gastos de producción (compra de semillas, combustible, etc.), adquisición de vacas y terneros y para pagar la mano de obra. Este límite se podría incrementar en el monto que se obtuviera por la eventual venta de vacas lecheras al principio de la temporada.

Si se siembran más de 2000 Has de E, deben también sembrarse por lo menos 1000 Has de B y 500 de C.

Formular un modelo de programación lineal para optimizar las operaciones del período.

Resolución

Definición de variables:

ING: Ingreso por ventas realizadas en el período.

CCO: Costo de compras realizadas en el período.

COP: Costo operativo de actividades desarrolladas en el período.

CMO: Costo de la mano de obra en el período.

jV: Cantidad de cultivo j (B. C. D. E) a vender (en toneladas).

WA: Cantidad de vacas dedicadas a la producción de leche. Variable entera.

WV: Cantidad de vacas lecheras a vender al principio del período. Variable entera.

WC: Cantidad de vacas a comprar al principio del período. Variable entera.

LE: Cantidad de leche a producir y vender (en litros).

Si: Superficie a sembrar con el cultivo i (A, B, C, D, E) (en Has).

ST: Superficie dedicada a pastoreo de los terneros.

iP: Producción del cultivo i (en toneladas).

kC: Cantidad de cultivo k (B, C, D, E, F, G) a comprar (en toneladas).

qW: Cantidad de cultivo q (A, B, C, D, E, F, G) enviada a la mezcla de alimento desde stock (que es igual a la cantidad producida que se debe reponer para el período siguiente).

TE: Cantidad de terneros a criar en el período. Variable entera.

pT: Cantidad de cultivo p (B, C) enviada para alimentar terneros desde stock (que es igual a la cantidad producida que se debe reponer para el período siguiente).

MO: Mano de obra requerida para las actividades productivas (en horas).

MO#: Mano de obra del tipo # (E: experta, I: inexperta, S: de supervisión) a contratar para satisfacer la necesidad de MO.

MW: Cantidad de alimento de vacas (en toneladas).

SEw: Superficie sembrada de E. El subíndice w = 1 se utilizará para indicar una cantidad sembrada menor a 2000 Has, mientras que w = 2 indicará una superficie sembrada mayor a 2000 Has.

Iw: Variable binaria para activar el rango correspondiente a la superficie sembrada de E.

Formulación:

- Función objetivo:

  MAX ING - COP - CCO - CMO

Sujeto a

- Totalización de ingresos por ventas, costo operativo, costo de compra y costo de mano de obra:

  INGRESOS) -ING + 460 BV + 390 CV + 440 DV + 500 EV + 300 TE + 400 WV + 0.20 LE = 0

  CTO OPER) -COP + 20 SA + 250 SB + 260 SC + 290 SD +270 SD + 0.3 AP + 5 BP + 6 CP + 7DP + 5 EP = 0

  CTO COMP) -CCO + 520 BC + 440 CC + 590 DC + 540 EC + 400 FC + 410 GC + 130 TE + 450 WC = 0

  CTO MO) 9 MOE + 5 MOI + 15 MOS - CMO = 0

- Disponibilidad de Superficie:

  D_CAMPO) SA + SB + SC + SD + SE + ST ≤ 6000

- Rendimiento de cultivos:

BPA) $AP - 0.10\ SA = 0$
BPB) $BP - 0.35\ SB = 0$
BPC) $CP - 0.23\ SC = 0$
BPD) $DP - 0.25\ SD = 0$
BPE) $EP - 0.30\ SE = 0$

- Balance de cultivos:

BA) $AP - AW = 0$
BB) $BP + BC - BV - BW - BT = 0$
BC) $CP + CC - CV - CW - CT = 0$
BD) $DP + DC - DV - DW = 0$
BE) $EP + EC - EV - EW = 0$
BF) $FC - FW = 0$
BG) $GC - GW = 0$

- Balance y determinación de cantidad de terneros:

BTE) $0.2\ TE - ST = 0$
BALTE) $-TE + 1.25\ BT + 1.43\ CT = 0$

- Balance y determinación de cantidad de vacas:

BWA) $WA - WC + WV = 100$
BALWA) $MW - 1.9\ WA = 0$

- Balance y requerimientos de cantidad de leche:

BLE) $-LE + 15000\ WA = 0$
RXLE) $LE \leq 2500000$
RNLE) $LE \geq 1000000$

- Mezcla de alimento para vacas:

BMW) $AW + BW + CW + DW + EW + FW + GW - MW = 0$

FIBRA) $15\ AW + 35\ BW + 25\ CW + 25\ DW + 32\ EW + 29\ FW + 39\ GW - 30\ MW \geq 0$

PROTEÍNA) $10\ AW + 20\ BW + 30\ CW + 24\ DW + 29\ EW + 22\ FW + 24\ GW - 25\ MW \geq 0$

ENERGÍA) $640\ AW + 1240\ BW + 1100\ CW + 1200\ DW + 1250\ EW + 950\ FW + 1150\ GW - 1200\ MW \geq 0$

CALCIO) $0.05\ AW + 0.5\ BW + 0.4\ CW + 0.3\ DW + 0.6\ EW + 0.1\ FW + 0.3\ GW - 0.4\ MW \geq 0$

FÓSFORO) $0.01\ AW + 0.03\ BW + 0.02\ CW + 0.03\ DW + 0.03\ EW + 0.01\ FW + 0.03\ GW - 0.02\ MW \geq 0$

- Restricciones de mano de obra:

RMO) $0.9\ SA + 2.2\ SB + 1.9\ SC + 2\ SD + 2.5\ SE + 18\ TE + 35\ WA + 0.002\ AP + 0.02\ BP + 0.01\ CP + 0.03\ DP + 0.02\ EP + 0.001\ LE - MO = 0$

BMO) $0.9\ MOE + 0.7\ MOI - MO = 0$

BMOS) $0.02 \text{ MOE} + 0.2 \text{ MOI} - \text{MOS} = 0$

DMOS) $\text{MOS} \leq 4000$

DMOE) $\text{MOE} \leq 20000$

- Restricción de disponibilidad de dinero:

  DDIN) $\text{COP} + \text{CCO} + \text{CMO} - 400 \text{ WV} \leq 750000$

- Determinación de rango para la siembra de E:

  DSEI) $-\text{SE} + \text{SE1} + \text{SE2} = 0$
  LSSE1) $\text{SE1} - 2000 \text{ IE1} \leq 0$
  LISE2) $\text{SE2} - 2000 \text{ IE2} \geq 0$
  LSSE2) $\text{SE2} - 6000 \text{ IE2} \leq 0$
  RIEI) $\text{IE1} + \text{IE2} \leq 1$

- Restricciones de superficie a sembrar de B y C en función de la Superficie de E:

  LISB) $\text{SB} - 1000 \text{ IE2} \geq 0$
  LISC) $\text{SC} - 500 \text{ IE2} \geq 0$

Condiciones de las variables:

IE1, IE2: variables binarias

WA, WV, WC y TE: Variables enteras.

El resto de las variables son continuas.

Todas las variables no negativas.

Solución:

```
1)        578632.9
```

VARIABLE	VALOR	C. OPORTUN.
IE1	0.000000	0.000000
IE2	1.000000	392473.156250
WA	166.000000	-1577.902344
WV	0.000000	-400.000000
WC	66.000000	450.000000
TE	0.000000	59.686287
ING	1237638.875000	0.000000
COP	389190.000000	0.000000
CCO	29700.000000	0.000000
CAN	0.000000	1.000000
CMO	240116.000000	0.000000
BV	199.257355	0.000000
CV	19.916178	0.000000
DV	0.000000	4.117647
EV	1280.426514	0.000000
LE	2490000.000000	0.000000
SA	0.000000	153.222122
SB	1000.000000	0.000000
SC	500.000000	0.000000
SD	0.000000	593.523438

AP	0.000000	0.000000
BP	350.000000	0.000000
CP	115.000000	0.000000
DP	0.000000	0.000000
EP	1350.000000	0.000000
BC	0.000000	60.000000
CC	0.000000	50.000000
DC	0.000000	145.882355
EC	0.000000	40.000000
FC	0.000000	0.000000
GC	0.000000	0.000000
MOE	20000.000000	0.000000
MOI	6764.500000	0.000000
MOS	1752.900024	0.000000
SE	4500.000000	0.000000
ST	0.000000	0.000000
AW	0.000000	0.000000
BW	150.742645	0.000000
CW	95.083824	0.000000
DW	0.000000	0.000000
EW	69.573532	0.000000
FW	0.000000	152.426468
GW	0.000000	3.750000
BT	0.000000	0.000000
CT	0.000000	0.000000
MW	315.399994	0.000000
MO	22735.150391	0.000000
SE1	0.000000	0.000000
SE2	4500.000000	0.000000

RESTRICC.	SLACK	V.MARGINAL
INGRESOS)	0.000000	-1.000000
CTO OPER)	0.000000	1.000000
CTO COMP)	0.000000	1.000000
CTO MO)	0.000000	1.000000
D_CAMPO)	0.000000	119.860001
BPA)	0.000000	-30.764034
BPB)	0.000000	454.771423
BPC)	0.000000	383.885712
BPD)	0.000000	436.774780
BPE)	0.000000	494.771423
BA)	0.000000	30.441177
BB)	0.000000	-460.000000
BC)	0.000000	-390.000000
BD)	0.000000	-444.117645
BE)	0.000000	-500.000000
BF)	0.000000	-400.000000
BG)	0.000000	-410.000000
BTE)	0.000000	119.860001
BALTE)	0.000000	0.000000
BWA)	0.000000	0.000000
BALWA)	0.000000	-447.720581
BLE)	0.000000	-0.188571
RXLE)	10000.000000	0.000000
RNLE)	1490000.000000	0.000000
BMW)	0.000000	551.176453
FIBRA)	417.441162	0.000000
PROTEINA)	0.000000	-3.602941

```
  ENERGIA)          0.000000          -0.757353
   CALCIO)         28.988972           0.000000
  FOSFORO)          2.203162           0.000000
      RMO)          0.000000          11.428572
      BMO)          0.000000         -11.428572
     BMOS)          0.000000          15.000000
     DMOS)       2247.099854           0.000000
     DMOE)          0.000000           0.985714
     DDIN)      90994.000000           0.000000
     DSEI)          0.000000           0.000000
    LSSE1)          0.000000           0.000000
    LISE2)       2500.000000           0.000000
    LSSE2)       1500.000000           0.000000
     RIEI)          0.000000           0.000000
     LISB)          0.000000        -235.832855
     LISC)          0.000000        -313.280579

No. DE ITERACIONES =    279
```

PROBLEMA No. 23
INDUSTRIA: ENERGÍA ELÉCTRICA
SECTOR: INGENIERÍA DE PLANTA
OBJETO: PROGRAMACIÓN MULTIETAPAS

Una empresa de servicio eléctrico planea ampliar su capacidad de generación para los próximos 6 años. Actualmente tiene una capacidad de 1000 MW pero, conforme a los pronósticos, necesitará anualmente la siguiente capacidad instalada mínima:

	1	2	3	4	5	6
Capacidad Mínima (MW)	1200	1300	1400	1450	1550	1600

Para aumentar la capacidad, existe la posibilidad de instalar generadores A, B, C y D (de 30, 70, 110 y 130 MW de capacidad, respectivamente).

El costo de instalación de los generadores depende de su tamaño y del período de puesta en marcha, conforme a la siguiente tabla:

GENERADOR	1	2	3	4	5	6
A	200	180	160	140	160	140
B	380	355	310	300	310	300
C	410	350	325	270	325	270
D	850	750	700	685	700	685

La instalación y puesta en servicio de los equipos se realizará al comenzar cada año.

Una vez que el generador entra en servicio, su capacidad estará disponible para satisfacer la demanda de los años posteriores.

Formular un modelo de PM que permita determinar cuántos generadores de cada tipo se deberán poner en funcionamiento en cada año.

Resolución

Definición de variables:

CIi: Capacidad instalada al comenzar el año i

#i: Cantidad de generadores de tipo # (A, B, C, D) a instalar al comienzo del año i.

Formulación:

- Funcional

MIN 200 A1 + 380 B1 + 410 C1 + 850 D1 + 180 A2 + 355 B2
+ 350 C2 + 750 D2 + 160 A3 + 310 B3 + 325 C3 + 700 D3
+ 140 A4 + 300 B4 + 270 C4 + 685 D4 + 160 A5 + 310 B5
+ 325 C5 + 700 D5 + 140 A6 + 300 B6 + 270 C6 + 685 D6

Sujeto a:

- Restricciones de balance de capacidad instalada

AÑO1) CI1 - CI0 - 30 A1 - 70 B1 - 110 C1 - 130 D1 = 0
AÑO2) CI2 - CI1 - 30 A2 - 70 B2 - 110 C2 - 130 D2 = 0
AÑO3) CI3 - CI2 - 30 A3 - 70 B3 - 110 C3 - 130 D3 = 0
AÑO4) CI4 - CI3 - 30 A4 - 70 B4 - 110 C4 - 130 D4 = 0
AÑO5) CI5 - CI4 - 30 A5 - 70 B5 - 110 C5 - 130 D5 = 0
AÑO6) CI6 - CI5 - 30 A6 - 70 B6 - 110 C6 - 130 D6 = 0

- Restricciones de requerimientos de capacidad instalada

R0) CI0 = 1000
R1) CI1 ≥ 1200
R2) CI2 ≥ 1300
R3) CI3 ≥ 1400
R4) CI4 ≥ 1450
R5) CI5 ≥ 1550
R6) CI6 ≥ 1600

- Condiciones de las variables

CIi: no negativas
#i: enteras no negativas

Resolución:

```
      Z)        2020.000

   VARIABLE       VALOR
         A1        0.000000
         B1        0.000000
         C1        2.000000
         D1        0.000000
         A2        0.000000
         B2        0.000000
         C2        1.000000
         D2        0.000000
         A3        0.000000
         B3        1.000000
         C3        0.000000
         D3        0.000000
         A4        0.000000
         B4        0.000000
         C4        2.000000
         D4        0.000000
         A5        0.000000
         B5        0.000000
```

C5	0.000000
D5	0.000000
A6	0.000000
B6	0.000000
C6	0.000000
D6	0.000000
CI1	1220.000000
CI0	1000.000000
CI2	1330.000000
CI3	1400.000000
CI4	1620.000000
CI5	1620.000000
CI6	1620.000000

RESTRICCIÓN	SLACK
AÑO1)	0.000000
AÑO2)	0.000000
AÑO3)	0.000000
AÑO4)	0.000000
AÑO5)	0.000000
AÑO6)	0.000000
R0)	0.000000
R1)	20.000000
R2)	30.000000
R3)	0.000000
R4)	170.000000
R5)	70.000000
R6)	20.000000

NO. ITERACIONES = 442

PROBLEMA No. 24
INDUSTRIA: MANUFACTURA
SECTOR: REQUISICIÓN DE MATERIALES
OBJETO: PROGRAMACIÓN DE PRODUCCIÓN (Fabricación o compra)

El producto "X" se ensambla con 2 piezas "A" y 3 piezas "B". A su vez, cada pieza "A" se arma con 3 componentes "M" y un componente "N"; y cada pieza "B" con 2 componentes "M", 3 "N" y 1 "P".

El armado de las piezas "A" insume 1hh por unidad; el de las "B", 2 hh. y el del producto "X" requiere 3 hh por unidad.

En el sector de montaje de las unidades "A" se dispone de 4000 hh por semana, mientras que en el de las unidades de tipo "B" hay 7000 hh disponibles. En el sector de montaje final se dispone de 8000 hh. Adicionalmente, entre los tres sectores de armado (A, B y X) se pueden contratar hasta 2000 hh extras por semana.

El costo de los componentes es el siguiente: M: 5 $/unidad; N: 6 $/unidad; P: 10 $/unidad.

El costo de la hora hombre normal es de $ 20, y el de la hora hombre extra es de $ 30.

El producto "X" se vende a $ 420 por unidad.

La disponibilidad semanal de componentes es de 7000 unidades de "P", 20000 unidades de "M" y 10000 de "N". Se requieren por lo menos 1000 piezas "X" por semana.

Existe la posibilidad de comprar a un proveedor hasta 200 unidades de piezas "A" por semana a un costo de $ 80 cada una y hasta 500 unidades de piezas "B" a un costo de $

110. Los lotes mínimos de compra son de 100 unidades para "A" y de 100 unidades también para "B".

El componente "N" lleva un tratamiento que requiere un insumo de energía "Q" (KW). La cantidad de energía requerida por cada componente N es función de la cantidad semanal de componentes "N" a utilizar y responde a la siguiente expresión:

$$Q = 0.05 \cdot N + 0.00005 \cdot N^2$$

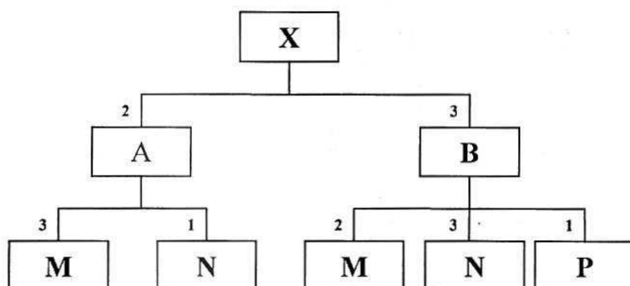
No hay limitación de disponibilidad de "Q", y el costo de cada KW es de 1$.

Por otra parte, se pueden vender hasta 1000 componentes de A a 70 $ y 500 de B a 100$.

Formular el programa matemático que permita obtener el plan de producción óptimo.

Resolución

El gráfico de la estructura del producto X es el siguiente:



Definición de variables:

X: Cantidad a vender de unidades del producto X

AF: Cantidad de piezas A fabricadas

AC: Cantidad de piezas A a comprar

A: Cantidad de piezas A para ensamblar el producto X

VA: Cantidad de piezas A a vender.

BC: Cantidad de piezas B a comprar

BF: Cantidad de piezas B fabricadas

B: Cantidad de piezas B para ensamblar el producto X

VB: Cantidad de piezas B a vender

M: Cantidad de componentes M a utilizar.

N: Cantidad de componentes N a utilizar.

P: Cantidad de componentes P a utilizar.

HN: Utilización de horas normales.

HE: Utilización de horas extras

Q: Consumo de energía

IAC: Variable binaria que se activa si se compra A

IBC: Variable binaria que se activa si se compra B.

Zi: Vectores *mesh* para definir una relación lineal por programación separable.

Formulación:

- Funcional

Max 420 X + 70 VA + 100 VB - 5 M - 6 N - 10 P - 20 HN - 30 HE - 80AC - 110 BC - 1Q

Sujeto a:

- Balance de piezas A y B:

BTA) AF + AC - A - VA = 0
BTB) VF + VC - B - VB = 0

- Balance de estructura de producto:

BM) - M + 3AF + 2BF = 0
BN) - N + AF + 3BF = 0
BP) - P + BF = 0
BA) - A + 2X = 0
BB) - B + 3X = 0

- Horas requeridas de MO para armar A, B y X:

BHA) 1 AF - HNA - HEA = 0
BHB) 2 BF - HNB - HEB = 0
BHX) 3 X - HNX - HEX = 0

- Disponibilidad de horas normales:

DHNA) HNA $\leq$ 4000
DHNB) HNB $\leq$ 7000
DHNX) HNX $\leq$ 8000

- Totalización de horas normales y de horas extras:

BHN) HNA + HNB + HNX - HN = 0
BHE) HEA + HEB + HEX - HE = 0

- Disponibilidad de horas extras:

DHE) HE $\leq$ 2000

- Disponibilidad de componentes:

DM) M $\leq$ 20000

DN) N ≤ 10000
DP) P ≤ 7000

- Requerimiento mínimo de producto X:

RMX) X ≥ 1000

- Cantidades máxima y mínima de A y B a comprar:

CMAXA) AC - 200 IAC ≤ 0
CMAXB) BC - 500 IBC ≤ 0
CMINA) AC - 100 IAC ≥ 0
CMINB) BC - 100 IBC ≥ 0

- Cantidad máxima a vender de A y B:

VTAA) VA ≤ 1000
VTAB) VB ≤ 500

- Linealización de la expresión $Q = 0.05\ N + 0.00005\ N^2$:

BNZ) - N + 2500 Z1 + 5000 Z2 + 7500 Z3 + 10000 Z4 = 0
BQZ) - Q + 437.5 Z1 + 1500 Z2 + 3187.5 Z3 + 5500 Z4 = 0
BZ) Z0 + Z1 + Z2 + Z3 + Z4 = 1

- Condiciones de las variables:

IAC e IBC: binarias
El resto de las variables no negativas

Solución:

Z) 37000.00

VARIABLE	VALOR	C.OPORT.
IAC	0	0
IBC	1	-27500
X	1000	0
VA	500	0
VB	0	65
M	12500	0
N	10000	0
P	2500	0
HN	10500	0
HE	0	0
AC	0	10
BC	500	0
Q	5500	0
AF	2500	0
BF	2500	0
A	2000	0
B	3000	0
HNA	2500	0
HE	0	10
HNB	5000	0
HEB	0	10
HNX	3000	0
HEX	0	10
Z1	0	212437.5

Z2	0	141000
Z3	0	70187.5
Z4	1	0
Z0	0	284500

RESTRIC.	SLACK	VALOR M.
BM)	0	5
BN)	0	35
BP)	0	10
BTA)	0	-70
BTB)	0	-165
BA)	0	70
BB)	0	165
BHA)	0	20
BHB)	0	20
BHX)	0	20
DHNA)	1500	0
DHNB)	2000	0
DHNX)	5000	0
BHN)	0	20
BHE)	0	30
DHE)	2000	0
DP)	4500	0
BNZ)	0	-29
BQZ)	0	1
BZ)	0	284500
DM)	7500	0
DN)	0	0
RMX)	0	-275
CMAXA)	0	0
CMAXB)	0	55
CMINA)	0	0
CMINB)	400	0
VTAA)	500	0
VTAB)	500	0

PROBLEMA No. 25
INDUSTRIA: MANUFACTURA
SECTOR: PRODUCCIÓN
OBJETO: SECUENCIAMIENTO

Se deben fabricar dos productos A y B. Cada uno de ellos requiere tres operaciones X, Y y Z, en esa secuencia, que es realizada en una máquina diferente. Los tiempos de realización son los indicados en la siguiente tabla (en horas):

PRODUCTO	MÁQUINA		
	X	Y	Z
A	2	4	3
B	1	5	4

Determinar la secuencia óptima de fabricación.

Resolución

Definición de variables:

Tij: Tiempo en el que el producto i (A,B) comienza la operación en la máquina j (X, Y, Z)

T: Tiempo total

Iij: Variable binaria que indica que en la máquina j se elabora primero el producto i

Formulación:

- Objetivo

1) MIN T

Sujeto a:

- Restricciones de secuencia de los productos:

2) TAY - TAX ≥ 2
3) TBY - TBX ≥ 1

4) TAZ - TAY ≥ 4
5) TBZ - TBY ≥ 5

6) T - TAZ ≥ 3
7) T - TBZ ≥ 4

- Restricciones de interferencia de las máquinas. En cada máquina se fabrica primero A o primero B (es decir, se da una restricción o la otra). Para plantear esta situación se toman las variables binarias Iij, y se asume un M = 20 suficientemente grande

8) TAX - TBX + 20 IAX ≥ 1
9) TBX - TAX + 20 IBX ≥ 2
10) IAX + IBX = 1

11) TAY - TBY + 20 IAY ≥ 5
12) TBY - TAY + 20 IBY ≥ 4
13) IAY + IBY = 1

14) TAZ - TBZ + 20 IAZ ≥ 4
15) TBZ - TAZ + 20 IBZ ≥ 3
16) IAZ + IBZ = 1

- Condiciones de las variables

Iij: Variables binarias
El resto de las variables son no negativas.

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

        Z)        13.00000

   VARIABLE          VALOR

        IAX           0.00
        IAY           0.00
        IAZ           0.00
```

T	13.00
TAY	6.00
TAX	1.00
TBY	1.00
TBX	0.00
TAZ	10.00
TBZ	6.00
IBX	1.00
IBY	1.00
IBZ	1.00

RESTRICCIÓN	SLACK
2)	3.00
3)	0.00
4)	0.00
5)	0.00
6)	0.00
7)	3.00
8)	0.00
9)	17.00
10)	0.00
11)	0.00
12)	11.00
13)	0.00
14)	0.00
15)	13.00
16)	0.00

NO. DE ITERACIONES= 75

PROBLEMA No. 26
INDUSTRIA: SERVICIOS
SECTOR: ABASTECIMIENTO
OBJETO: COMPRA Y SELECCIÓN DE PROVEEDORES

Una compañía internacional está abriendo sus oficinas en Buenos Aires, y debe comprar 800 impresoras modelo Printpack XM. Existen cuatro proveedores que ofrecen grandes volúmenes de este modelo de impresoras.

El proveedor 1 puede suministrar hasta 400 impresoras a un costo de $500 cada una, más un costo fijo por orden de $1000. El proveedor 2 puede entregar hasta 350 impresoras; las primeras 100 costarían $550 cada una, mientras que cada impresora adicional (después de las 100) costaría $470. Este proveedor no considera costo fijo.

El proveedor 3 maneja un mínimo de 50 impresoras por orden y un máximo de 200. Si se le compra a este proveedor, pero la orden contiene menos de 100 impresoras, entonces se tendrá un costo fijo de $300. El precio de la impresora con este proveedor es de $495.

Finalmente, el proveedor 4 puede proveer hasta 200 impresoras. Si se le compran menos de 120, el precio es de $560 por impresora; pero si se le compran 120 o más el precio unitario es de $ 490.

1. Formule y resuelva un modelo de programación matemática que encuentre la solución óptima.

2. ¿Cómo se modificaría el planteo y la solución si la compañía ha decidido no comprar a más de tres proveedores?.

3. ¿Cuál sería, en cambio, la formulación y el resultado si se estableciera que se debe comprar a cada proveedor por lo menos 150 impresoras?

Resolución

Definición de variables:

Xi: Cantidad de impresoras a adquirir al proveedor i (1, 2, 3, 4)

Ii: Variable binaria para determinar si se compra o no al proveedor i

Xik: Cantidad de impresoras a adquirir al proveedor i en el rango k

Iik: Variable binaria para determinar si se compra o no al proveedro i en el rango k

Formulación:

- Funcional:

  MIN 500 X1 + 1000 I1 + 550 X21 + 470 X22 + 495 X3 + 300 I31 + 560 X41 + 490 X42

Sujeto a:

- Número total de impresoras

  X1 + X2 + X3 + X4 = 800

- Proveedor 1

  X1 - 400 I1 ≤ 0

  Esto implica afectar a las variables en la función objetivo de la siguiente forma:
  Z= ...... 500 X1 + 1000 I1+ ....

- Proveedor 2: Se definen dos rangos de X2 (uno para las primeras 100 impresoras y el otro para las siguientes 250). Si se activa I22 significa que se compran más de 100 impresoras (por lo que x21 va a ser igual a 100 y por consiguiente también se activa I21). Si se activa solamente I21 significa que se comprarán menos de 100 impresoras.

  X2 - X21 - X22 = 0
  X21 - 100 I21 ≤ 0
  X21 - 100 I22 ≥ 0
  X22 - 250 I22 ≤ 0

  Estas variables contribuyen a la función objetivo de la siguiente forma:
  Z= ...... 550 X21 + 470 X22 + ...

  Si bien la primera ecuación podría no incluirse, resulta conveniente a los efectos de tener totalizada la cantidad de computadoras a adquirir al proveedor 2 en la variable X2. También podría incluirse la restricción I21 – I22 ≥ 0, aunque no es necesario ya que siempre se va a activar el rango 1 con preferencia al rango 2 (esto es porque las impresoras del rango 1 son más baratas que las del rango 2).

- Proveedor 3: Se definen también 2 rangos (el primero entre 50 y 100 y el segundo entre 100 y 200 impresoras). Se puede activar solamente 1 de los dos rangos.

  X3 - X31 - X32 = 0
  X31 - 50 I31 ≥ 0
  X31 - 100 I31 ≤ 0
  X32 - 100 I32 ≥ 0

X32 - 200 I32 ≤ 0
I3 - I31 - I32 = 0

Estas variables contribuyen a la función objetivo de la siguiente forma:
Z = ... + 495 X3 + 300 I31 + ...

- Proveedor 4: Este caso difiere del caso 2 en el sentido de que si se compran más de 120 unidades todas las impresoras estarán sujetas al precio con descuento. En consecuencia, solamente uno de los dos rangos se debe activar.

X4 - X41 - X42 = 0
X41 - 120 I41 ≤ 0
X42 - 120 I42 ≥ 0
X42 - 200 I42 ≤ 0
I41 + I42 - I4 = 0

- Condiciones de las variables:

Ii: binarias
Iik: binarias
El resto de las variables son no negativas.

Solución:

SOLUCIÓN ÓPTIMA ENCONTRADA EN EL PASO 16

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 395500.0

VARIABLE	VALOR	C.OPORTUNIDAD
I1	1.000000	1000.000000
I2	1.000000	0.000000
I21	1.000000	0.000000
I22	1.000000	-2500.000000
I31	0.000000	-200.000000
I32	1.000000	-1000.000000
I3	1.000000	0.000000
I41	0.000000	0.000000
I42	1.000000	-2000.000000
I4	1.000000	0.000000
X1	50.000000	0.000000
X21	100.000000	0.000000
X22	250.000000	0.000000
X3	200.000000	0.000000
X41	0.000000	60.000000
X42	200.000000	0.000000
X2	350.000000	0.000000
X4	200.000000	0.000000
X31	0.000000	0.000000
X32	200.000000	0.000000

RESTRICCIÓN	SLACK	V. MARGINAL
2)	0.000000	-500.000000
3)	350.000000	0.000000
4)	0.000000	500.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	-50.000000

7)	0.000000	30.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	0.000000	5.000000
10)	0.000000	0.000000
11)	0.000000	5.000000
12)	100.000000	0.000000
13)	0.000000	5.000000
14)	0.000000	0.000000
15)	0.000000	500.000000
16)	0.000000	0.000000
17)	80.000000	0.000000
18)	0.000000	10.000000
19)	0.000000	0.000000

NO. ITERACIONES = 45

- Si no se puede comprar a más de tres proveedores, habría que agregar la siguiente restricción al problema:

$I1 + I2 + I3 + I4 \leq 3$

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 396500.0

VARIABLE	VALOR	C.OPORTUNIDAD
I1	1.000000	1000.000000
I2	1.000000	0.000000
I21	1.000000	0.000000
I22	1.000000	-2500.000000
I31	0.000000	-200.000000
I32	0.000000	-1000.000000
I3	0.000000	0.000000
I41	0.000000	0.000000
I42	1.000000	-2000.000000
I4	1.000000	0.000000
X1	250.000000	0.000000
X21	100.000000	0.000000
X22	250.000000	0.000000
X3	0.000000	0.000000
X41	0.000000	60.000000
X42	200.000000	0.000000
X2	350.000000	0.000000
X4	200.000000	0.000000
X31	0.000000	0.000000
X32	0.000000	0.000000

RESTRICCIÓN	SLACK	V. MARGINAL
2)	0.000000	-500.000000
3)	150.000000	0.000000
4)	0.000000	500.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	-50.000000
7)	0.000000	30.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	0.000000	5.000000
10)	0.000000	0.000000

11)	0.000000	5.000000
12)	0.000000	0.000000
13)	0.000000	5.000000
14)	0.000000	0.000000
15)	0.000000	500.000000
16)	0.000000	0.000000
17)	80.000000	0.000000
18)	0.000000	10.000000
19)	0.000000	0.000000
20)	0.000000	0.000000

NO. ITERACIONES = 39

- Finalmente, la última pregunta nos lleva a plantear las siguientes restricciones adicionales:

  $X1 - 150\ I1 \geq 0$
  $X2 - 150\ I2 \geq 0$
  $X3 - 150\ I3 \geq 0$
  $X4 - 150\ I4 \geq 0$

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 396250.0

VARIABLE	VALOR	C.OPORTUNIDAD
I1	1.000000	2500.000000
I2	1.000000	0.000000
I21	1.000000	0.000000
I22	1.000000	1000.000000
I31	0.000000	300.000000
I32	1.000000	0.000000
I3	1.000000	750.000000
I41	0.000000	0.000000
I42	1.000000	0.000000
I4	1.000000	0.000000
X1	150.000000	0.000000
X21	100.000000	0.000000
X22	250.000000	0.000000
X3	150.000000	0.000000
X41	0.000000	70.000000
X42	150.000000	0.000000
X2	350.000000	0.000000
X4	150.000000	0.000000
X31	0.000000	0.000000
X32	150.000000	0.000000

RESTRICCIÓN	SLACK	V. MARGINAL
2)	0.000000	-490.000000
3)	250.000000	0.000000
4)	0.000000	490.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.000000	-60.000000
7)	0.000000	20.000000
8)	0.000000	0.000000
9)	0.000000	0.000000
10)	0.000000	0.000000

```
     11)          0.000000          0.000000
     12)         50.000000          0.000000
     13)         50.000000          0.000000
     14)          0.000000          0.000000
     15)          0.000000        490.000000
     16)          0.000000          0.000000
     17)         30.000000          0.000000
     18)         50.000000          0.000000
     19)          0.000000          0.000000
     20)          0.000000        -10.000000
     21)        200.000000          0.000000
     22)          0.000000         -5.000000
     23)          0.000000          0.000000

 NO. DE ITERACIONES= 89
```

PROBLEMA No. 27
INDUSTRIA: ENTRETENIMIENTO
SECTOR: PROGRAMACIÓN
OBJETO: ASIGNACIÓN

Para un evento deportivo muy importante, un canal de TV debe programar los espacios publicitarios. Se han establecido 4 tandas publicitarias: una antes de comenzar el partido, dos durante el entretiempo y una al finalizar el encuentro.

Los precios a los que se vende el segundo de cada tanda, y la duración de las mismas se indican en la siguiente tabla:

TANDA	Duración (min)	Precio ($/seg)
1a	5	900
2a	4	1200
3a	6	1500
4a	4	800

Existen pautas de transmisión muy extrictas para este evento, por lo que las tandas publicitarias no pueden exceder las duraciones indicadas.

Ocho empresas pautaron la emisión de los avisos publicitarios en la forma que se indica en la próxima tabla:

Cantidad de avisos	A	B	C	D	E	F	G	H
Mínima	2	1	1	1	3	2	2	2
Máxima	3	4	4	4	4	3	4	2

La duración de cada aviso, se indica a continuación:

	A	B	C	D	E	F	G	H
Duración (seg)	30	20	15	18	10	25	30	45

Por otra parte, el canal puede pasar promoción de su programación, para lo que ha seleccionado 4 avisos diferentes. En la primera tanda publicitaria se deberá pasar por lo menos un aviso promocional de cada tipo. La cantidad máxima de avisos promocionales y la duración de cada uno de ellos se indican en la tabla siguiente:

	W	X	Y	Z
Cantidad de Máxima de avisos	6	4	4	6
Duración (seg)	20	45	40	15

Los avisos empresariales o promocionales no pueden repetirse en una misma tanda publicitaria, excepto W y Z, que pueden pasarse dos veces por tanda.

1) *Formular un modelo matemático cuyo objetivo principal sea maximizar la venta del espacio publicitario, mientras que (como meta secundaria) se minimice el tiempo muerto de las tandas publicitarias que obliga a anticipar la emisión del programa televisivo.*
2) *Formular el modelo en el que se invierten las metas referidas.*

Resolución

Definición de variables:

DMENOS: Variable de desviación que indica el monto de dinero que no se alcanza con respecto a una meta de ingresos arbitrariamente alta.

DMENOSi: Variables de desviación que indican el tiempo muerto de la tanda i, con relación a la duración de la tanda.

#i: Variable binaria para indicar si se pasa el aviso # (A, B, C, D, E, F, G, H, X, Y) en la tanda i.

$i: Variable entera para indicar la cantidad de avisos $ (W, Z) que se pasan en la tanda i.

INGRESO: Variable generada para calcular el monto total de ingresos por venta publicitaria.

Formulación:

- Funcional:

  MIN 1000 DMENOS + DMENOS1 + DMENOS2 + DMENOS3 + DMENOS4

Sujeto a:

- Cantidades mínimas y máximas de avisos pautados:

  2) $A1 + A2 + A3 + A4 \geq 2$
  3) $A1 + A2 + A3 + A4 \leq 3$

  4) $B1 + B2 + B3 + B4 \geq 1$
  5) $B1 + B2 + B3 + B4 \leq 4$

  6) $C1 + C2 + C3 + C4 \geq 1$
  7) $C1 + C2 + C3 + C4 \leq 4$

  8) $D1 + D2 + D3 + D4 \geq 1$
  9) $D1 + D2 + D3 + D4 \leq 4$

  10) $E1 + E2 + E3 + E4 \geq 3$
  11) $E1 + E2 + E3 + E4 \leq 4$

12) $F1 + F2 + F3 + F4 \geq 2$
13) $F1 + F2 + F3 + F4 \leq 3$

14) $G1 + G2 + G3 + G4 \geq 2$
15) $G1 + G2 + G3 + G4 \leq 4$

16) $H1 + H2 + H3 + H4 = 2$

- Cantidades máximas de avisos promocionales:

17) $W1 + W2 + W3 + W4 \leq 6$

18) $X1 + X2 + X3 + X4 \leq 4$

19) $Y1 + Y2 + Y3 + Y4 \leq 4$

20) $Z1 + Z2 + Z3 + Z4 \leq 6$

- Los avisos promocionales W y Z pueden pasarse como máximo dos veces por tanda:

21) $W1 \leq 2$
22) $W2 \leq 2$
23) $W3 \leq 2$
24) $W4 \leq 2$
25) $Z1 \leq 2$
26) $Z2 \leq 2$
27) $Z3 \leq 2$
28) $Z4 \leq 2$

- En la primera tanda se debe pasar por lo menos un aviso promocional de cada tipo:

29) $W1 \geq 1$
30) $X1 \geq 1$
31) $Y1 \geq 1$
32) $Z1 \geq 1$

- Metas de tiempo muerto de tandas publicitarias:

33) $30A1 + 20B1 + 15C1 + 18D1 + 10E1 + 25F1 + 30G1 + 45H1 + 20W1 + 45X1 + 40Y1 + 15Z1 + DMENOS1 = 300$

34) $30A2 + 20B2 + 15C2 + 18D2 + 10E2 + 25F2 + 30G2 + 45H2 + 20W2 + + 45X2 + 40Y2 + 15Z2 + DMENOS2 = 240$

35) $30A3 + 20B3 + 15C3 + 18D3 + 10E3 + 25F3 + 30G3 + 45H3 + 20W3 + + 45X3 + 40Y3 + 15Z3 + DMENOS3 = 360$

36) $30A4 + 20B4 + 15C4 + 18D4 + 10E4 + 25F4 + 30G4 + 45H4 + 20W4 + + 45X4 + 40Y4 + 15Z4 + DMENOS4 = 240$

- Meta de tener un ingreso de $1.000.000

37) $27000\,A1 + 18000\,B1 + 13500\,C1 + 16200\,D1 + 9000\,E1 + 22500\,F1 + 27000\,G1 + 40500\,H1 + 36000\,A2 + 24000\,B2 + 18000\,C2 + 21600\,D2 + 12000\,E2 + 30000\,F2 + 36000\,G2 + 54000\,H2 + 45000\,A3 + 30000\,B3 + 22500\,C3 + 27000\,D3 + 15000\,E3 + 37500\,F3 + 45000\,G3 + 67500\,H3 + 24000\,A4 + 16000\,B4 + 12000\,C4 + 14400\,D4 + 8000\,E4 + 20000\,F4 + 24000\,G4 + 36000\,H4 + DMENOS = 1000000$

- Cálculo de ingreso. Esta ecuación se puede formular a los efectos de tener totalizado el
  ingreso total:

  35) 27000 A1 + 18000 B1 + 13500 C1 + 16200 D1 + 9000 E1 + 22500 F1 + 27000 G1 + 40500 H1 + 36000 A2 + 24000 B2 + 18000 C2 + 21600 D2 + 12000 E2 + 30000 F2 + 36000 G2 + 54000 H2 + 45000 A3 + 30000 B3 + 22500 C3 + 27000 D3 + 15000 E3 + 37500 F3 + 45000 G3 + 67500 H3 + 24000 A4 + 16000 B4 + 12000 C4 + 14400 D4 + 8000 E4 + 20000 F4 + 24000 G4 + 36000 H4 - INGRESO = 0

- Condición de las variables:

  Ai, Bi, Ci, Di, Ei, Fi, Gi, Hi, Xi e Yi variables binarias y
  Wi y Zi variables enteras

Solución:

```
SOLUCIÓN ÓPTIMA ENCONTRADA EN EL PASO 211
```

Z) 271300000

El valor del funcional en problemas de programación de metas como éste no tiene significado alguno

VARIABLE	VALOR
A1	1
A2	1
A3	1
A4	0
B1	1
B2	1
B3	1
B4	1
C1	1
C2	1
C3	1
C4	1
D1	1
D2	1
D3	1
D4	1
E1	1
E2	1
E3	1
E4	1
F1	1
F2	1
F3	1
F4	0
G1	1
G2	1
G3	1
G4	1
H1	0
H2	1
H3	1
W1	2
W2	0

W3	2
W4	2
X1	1
X2	1
X3	1
X4	1
Y1	1
Y2	0
Y3	1
Y4	1
Z1	1
Z2	0
Z3	2
Z4	2
DMENOS	271300
DMENOS1	12
DMENOS2	2
DMENOS3	12
DMENOS4	12
INGRESO	728700

Vemos que el ingreso total es de $728700 y el tiempo de tanda desperdiciado total es de 38 segundos.

- Para responder a la segunda pregunta, simplemente se modifica el funcional teniendo en cuenta que la primera meta es minimizar el tiempo muerto de la tercera tanda (la más rentable), luego de la segunda, y así sucesivamente.

  MIN DMENOS + 12000000 DMENOS1 + 9000000 DMENOS2
  + 15000000 DMENOS3 + 8000000 DMENOS4

Solución:

VARIABLE	VALOR
A1	1
A2	1
A3	1
A4	0
B1	1
B2	1
B3	1
B4	1
C1	0
C2	1
C3	1
C4	1
D1	0
D2	1
D3	1
D4	1
E1	1
E2	1
E3	1
E4	1
F1	1
F2	0
F3	1
F4	1

```
      G1          1
      G2          1
      G3          1
      G4          1
      H1          1
      H2          0
      H3          1
      H4          0
      W1          2
      W2          0
      W3          2
      W4          2
      X1          1
      X2          1
      X3          1
      X4          1
      Y1          1
      Y2          1
      Y3          1
      Y4          1
      Z1          1
      Z2          2
      Z3          2
      Z4          1
  DMENOS     324500
 DMENOS1          0
 DMENOS2          2
 DMENOS3         12
 DMENOS4          2
 INGRESO     675500
```

En este caso, se reduce el ingreso a $ 675500, y el tiempo muerto total de publicidad es 16 segundos.

PROBLEMA No. 28
INDUSTRIA: GENERAL
SECTOR: LOGÍSTICA
OBJETO: LOCALIZACIÓN

Una compañía manufactura un producto X en tres plantas y las envía después a tres centros de distribución (los cuales son propiedad de la compañía). Los costos de producción y distribución variable por unidad transportada entre las plantas y los centros de distribución, así como la capacidad de producción mensual de las plantas, la demanda mensual de cada centro de distribución, y los costos fijos mensuales por operar las plantas y centros de distribución se muestran en la siguiente tabla

Planta	Centro de distribución A	Centro de distribución B	Centro de distribución C	Capacidad	Costos Fijos
1	30	27	25	600	1800
2	29	25	24	700	2000
3	27	30	26	500	1900
Demanda	600	500	500		
Costos Fijos	500	400	600		

La compañía está pasando por momentos económicos difíciles y la administración ha decidido cerrar un centro de distribución y no operar más de dos plantas. Desde luego que la demanda del centro de distribución se perderá (no será satisfecha). Cuando un centro de distribución se cierra, nada llegará a él y los costos fijos no se tomarán en cuenta. Cuando se cierra una planta, nada se manufacturará ni saldrá de ella. Formule el modelo de programación matemática para decidir qué planta y centro de distribución se debe cerrar.

Resolución

Definición de variables:

Xij: Cantidad de unidades del producto X a entregar desde la planta i al centro j.

Ii: Variable binaria que se activa si la planta i queda abierta y se desactiva si la planta se cierra.

Ij: Variable binaria que se activa si el centro j queda abierto y se desactiva si el centro se cierra.

Formulación:

- Función objetivo:

MIN Z) 30 X1A + 27 X1B + 25 X1C + 1800 I1 + 29 X2A + 25 X2B
+ 24 X2C + 2000 I2 + 27 X3A + 30 X3B + 26 X3C + 1900 I3
+ 500 IA + 400 IB + 600 IC

Sujeto a:

- Capacidades de planta:

1) X1A + X1B + X1C - 600 I1 ≤ 0
2) X2A + X2B + X2C - 700 I2 ≤ 0
3) X3A + X3B + X3C - 500 I3 ≤ 0

- Requerimientos en centros de distribución:

A) X1A + X2A + X3A - 600 IA = 0
B) X1B + X2B + X3B - 500 IB = 0
C) X1C + X2C + X3C - 500 IC = 0

- Restricciones de cantidad de plantas en funcionamiento y cierre de centro de distribución:

RP) I1 + I2 + I3 ≤ 2
RC) IA+IB+IC = 2

- Condiciones de las variables:

Ii e Ij binarias
Xij no negativas

Resolución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
```

```
Z)          29600.00

VARIABLE            VALOR

IA                  0
IB                  1
IC                  1
I1                  1
I2                  1
I3                  0
X1A                 0
X1B                 0
X1C                 300
X2A                 0
X2B                 500
X2C                 200
X3A                 0
X3B                 0
X3C                 0

RESTRICCIÓN         SLACK

1)                  300
2)                  0
3)                  0
A)                  0
B)                  0
C)                  0
RP)                 0
RC)                 0

NO. DE ITERACIONES= 64
```

PROBLEMA No. 29
INDUSTRIA: SERVICIOS
SECTOR: LOGÍSTICA
OBJETO: VIAJANTE DE COMERCIO

Una empresa de logística quiere encontrar la ruta óptima para efectuar una distribución que se debe hacer en cinco ciudades. Una de las restricciones impuestas es que cada ciudad no se debe visitar más de una vez. Los costos asociados por el viaje de una ciudad a otra se dan en la siguiente tabla.

		A ciudad				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
De ciudad	**1**		20	4	10	35
	2	20		5	25	10
	3	4	5		6	6
	4	10	25	6		20
	5	35	10	6	20	

Resolución

Definición de variables:

Iij: Variable binaria para indicar si el viajante pasa de la ciudad i a la ciudad j.

Formulación:

- Funcional:

$$\begin{aligned} MIN\ & 20\,I12 + 4\,I13 + 10\,I14 + 35\,I15 + 20\,I21 + 5\,I23 + 25\,I24 + 10\,I25 \\ & + 4\,I31 + 5\,I32 + 6\,I34 + 6\,I35 + 10\,I41 + 25\,I42 + 6\,I43 + 20\,I45 \\ & + 35\,I51 + 10\,I52 + 6\,I53 + 20\,I54 \end{aligned}$$

Sujeto a:

- Restricciones:

$$\begin{aligned} I12 + I13 + I14 + I15 &= 1 \\ I21 + I23 + I24 + I25 &= 1 \\ I31 + I32 + I34 + I35 &= 1 \\ I41 + I42 + I43 + I45 &= 1 \\ I51 + I52 + I53 + I54 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I21 + I31 + I41 + I51 &= 1 \\ I12 + I32 + I42 + I52 &= 1 \\ I13 + I23 + I43 + I53 &= 1 \\ I14 + I24 + I34 + I54 &= 1 \\ I15 + I25 + I35 + I45 &= 1 \end{aligned}$$

- Condiciones de las variables:

Todas binarias.

Solución:

Indicaremos en la solución solamente las variables distintas de cero.

```
Z   =   40

I14 =   1
I25 =   1
I31 =   1
I43 =   1
I52 =   1
```

Esta no es una solución factible, ya que existen dos subrecorridos (1-4-3-1 y 2-5-2). Para resolver el problema se deben agregar restricciones que destruyan la posibilidad de subrecorridos. Existen dos formas:

1) El primer método consiste en ir resolviendo el problema y observando el resultado. Si se observa algún subrecorrido se procede a eliminar un arco de la cantidad de arcos de cada subrecorrido:

$$\begin{aligned} I14 + I43 + I31 &\leq 2 \\ I25 + I52 &\leq 1 \end{aligned}$$

Solución:

```
Z   = 41

I14 = 1
```

```
I25 = 1
I32 = 1
I41 = 1
I53 = 1
```

Tampoco hemos encontrado un recorrido completo, por lo que se agregan las restricciones:

$I14 + I41 \leq 1$

$I32 + I25 + I53 \leq 2$

Solución:

```
Z   = 49

I14 = 1
I23 = 1
I31 = 1
I45 = 1
I52 = 1
```

Ahora sí, tenemos un recorrido completo: 1-4-5-2-3-1, a un costo total de $49.

2) La otra forma de resolver el problema del viajante es agregando directamente al planteo inicial las siguientes restricciones:

$U2 - U3 + 4\ I23 \leq 3$
$U2 - U4 + 4\ I24 \leq 3$
$U2 - U5 + 4\ I25 \leq 3$

$U3 - U2 + 4\ I32 \leq 3$
$U3 - U4 + 4\ I34 \leq 3$
$U3 - U5 + 4\ I35 \leq 3$

$U4 - U2 + 4\ I42 \leq 3$
$U4 - U3 + 4\ I43 \leq 3$
$U4 - U5 + 4\ I45 \leq 3$

$U5 - U2 + 4\ I52 \leq 3$
$U5 - U3 + 4\ I53 \leq 3$
$U5 - U4 + 4\ I54 \leq 3$

en donde n = 4 es el número de ciudades a visitar y el término independiente es n - 1.

Las variables Ui representan un orden relativo en que se visitan las ciudades, comenzando con cero.

Resolviendo tenemos:

Solución:

```
Z    = 49

I14  =  1
I23  =  1
I31  =  1
I45  =  1
I52  =  1
```

```
U2 = 2
U3 = 3
U4 = 0
U5 = 1
```

Es decir, partiendo de la ciudad 1, se visita primero la ciudad 4 (orden 0), luego la 5 (orden 1), después 2 (orden 2), 3 (orden 3) y finalmente se regresa a 1.

PROBLEMA No. 30
INDUSTRIA: SERVICIOS AERONÁUTICOS
SECTOR: RECURSOS HUMANOS
OBJETO: PLANEAMIENTO DE PERSONAL MULTIETAPAS

El gerente de personal de una compañia aérea está considerando las necesidades de auxiliares de a bordo para los próximos 6 meses.

Entrenar a un auxiliar recién contratado requiere dos meses. Durante el primer mes el trabajo efectivo de un trainee *equivale a un 20 %. Durante el segundo mes, en cambio, el trabajo efectivo, equivale a un 50 %.*

El entrenamiento y supervisión de los trainees *es llevado a cabo por auxiliares de a bordo regulares. Un auxiliar regular puede entrenar y supervisar a 10* trainees *recién ingresados o 20* trainees *con un mes de entrenamiento. Mientras están dedicados al entrenamiento, los auxiliares regulares no realizan trabajo efectivo como auxiliares.*

Los trainees *reciben $ 500 por mes, mientras que los auxiliares regulares cobran $ 900 por mes.*

Las renuncias de los auxiliares de a bordo estimada es la siguiente: Regulares, 10 % mensual; Trainees *de un mes, 2%;* Trainees *de dos meses, 5%.*

Puede suponerse que las renuncias se efectúan justo a fin de mes, y que las contrataciones se hacen de manera que el trainne *esté disponible para iniciar sus actividades el primer día del mes.*

A principios de enero habrá 55 auxiliares regulares y 20 trainees *de un mes. Se desea contar con una cantidad disponible de auxiliares equivalente a 110 auxiliares regulares al comenzar julio.*

El requerimiento de trabajo efectivo de auxiliares a bordo, en términos de cantidad de auxiliares regulares, es el siguiente:

Enero	*60*
Febrero	*50*
Marzo	*60*
Abril	*80*
Mayo	*70*
Junio	*100*

El gerente de personal debe decidir cuántos auxiliares deberá contratar cada mes.

Formular un modelo de programación matemática que permita resolver este problema.

Resolución

Definición de variables:

Ri: Asistentes regulares del período i

TSi: Asistentes *trainees senior* (ingresados el mes i-1) del mes i.

TJi: Asistente *trainne junior* (ingresados en el mes i) del mes i.

Ei: Asistentes dedicados a entrenamiento del mes i.

Formulación:

- Función objetivo:

MIN $500\,TS1 + 500\,TS2 + 500\,TS3 + 500\,TS4 + 500\,TS5 + 500\,TS6 + 500\,TJ1 + 500\,TJ2 + 500\,TJ3 + 500\,TJ4 + 500\,TJ5 + 500\,TJ6 + 900\,R1 + 900\,R2 + 900\,R3 + 900\,R4 + 900\,R5 + 900\,R6$

Sujeto a:

- Requerimientos:

$R1 + 0.5\,TS1 + 0.2\,TJ1 - E1 \geq 60$
$R2 + 0.5\,TS2 + 0.2\,TJ2 - E2 \geq 50$
$R3 + 0.5\,TS3 + 0.2\,TJ3 - E3 \geq 60$
$R4 + 0.5\,TS4 + 0.2\,TJ4 - E4 \geq 80$
$R5 + 0.5\,TS5 + 0.2\,TJ5 - E5 \geq 70$
$R6 + 0.5\,TS6 + 0.2\,TJ6 - E6 \geq 100$

- Disponibilidad inicial:

$R1 = 55$
$TS1 = 20$

- Cantidad de regulares: La ecuación es $Ri = 0.9\,Ri\text{-}1 + 0.95\,TSi\text{-}1$. Como el valor así obtenido puede resultar continuo y a fin de evitar una incompatibilidad al establecer que Ri debe ser discreta, se redondea el valor obtenido al entero superior.

$- R2 + 0.9\,R1 + 0.95\,TS1 \leq 0$
$- R3 + 0.9\,R2 + 0.95\,TS2 \leq 0$
$- R4 + 0.9\,R3 + 0.95\,TS3 \leq 0$
$- R5 + 0.9\,R4 + 0.95\,TS4 \leq 0$
$- R6 + 0.9\,R5 + 0.95\,TS5 \leq 0$

$R2 - 0.9\,R1 - 0.95\,TS1 \leq 1$
$R3 - 0.9\,R2 - 0.95\,TS2 \leq 1$
$R4 - 0.9\,R3 - 0.95\,TS3 \leq 1$
$R5 - 0.9\,R4 - 0.95\,TS4 \leq 1$
$R6 - 0.9\,R5 - 0.95\,TS5 \leq 1$

- Cantidad de *Trainees* de un mes: Igual consideración con respecto al redondeo.

$- TS2 + 0.98\,TJ1 \leq 0$
$- TS3 + 0.98\,TJ2 \leq 0$
$- TS4 + 0.98\,TJ3 \leq 0$
$- TS5 + 0.98\,TJ4 \leq 0$
$- TS6 + 0.98\,TJ5 \leq 0$

$TS2 - 0.98\,TJ1 \leq 1$
$TS3 - 0.98\,TJ2 \leq 1$
$TS4 - 0.98\,TJ3 \leq 1$
$TS5 - 0.98\,TJ4 \leq 1$
$TS6 - 0.98\,TJ5 \leq 1$

- Disponibilidad a principios de julio: La fórmula es

  *0.9 R6 + 0.95 * 0.5 TS6 + 0.98 * 0.2 TJ6 ≥ 110*

  Por consiguiente, la restricción se expresa como:

  0.9 R6 + 0.475 TS6 + 0.196 TJ6 ≥ 110

- Cantidad de entrenadores: Se debe hacer la misma consideración para el redondeo que para los casos anteriores. La expresión matemática de la restricción para el mes i es $TS_i/20 + TJ_i/10 = E_i$. Luego:

  - E1 + 0.05 TS1 + 0.1 TJ1 ≤ 0
  - E2 + 0.05 TS2 + 0.1 TJ2 ≤ 0
  - E3 + 0.05 TS3 + 0.1 TJ3 ≤ 0
  - E4 + 0.05 TS4 + 0.1 TJ4 ≤ 0
  - E5 + 0.05 TS5 + 0.1 TJ5 ≤ 0
  - E6 + 0.05 TS6 + 0.1 TJ6 ≤ 0

  E1 - 0.05 TS1 - 0.1 TJ1 ≤ 1
  E2 - 0.05 TS2 - 0.1 TJ2 ≤ 1
  E3 - 0.05 TS3 - 0.1 TJ3 ≤ 1
  E4 - 0.05 TS4 - 0.1 TJ4 ≤ 1
  E5 - 0.05 TS5 - 0.1 TJ5 ≤ 1
  E6 - 0.05 TS6 - 0.1 TJ6 ≤ 1

- Condiciones de las variables:

  Todas las variables son enteras no negativas

<u>Solución:</u>

```
        VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

          1)        498000.0

     VARIABLE       VALOR

          R1          55
         TS1          20
         TJ1           0
          E1           1
          R2          69
         TS2           0
         TJ2          18
          E2           2
          R3          63
         TS3          18
         TJ3           0
          E3           1
          R4          74
         TS4           0
         TJ4          65
          E4           7
          R5          67
         TS5          64
         TJ5           0
          E5           4
```

```
        R6        122
       TS6          1
       TJ6          0
        E6          1


No DE ITERACIONES = 18859
```

Como se observa en el informe de salida, el proceso de solución de los problemas enteros requiere una cantidad de iteraciones muy importante, por lo que encontrar una solución factible lleva un tiempo considerable.

PROBLEMA No. 31
INDUSTRIA: PETRÓLEO
SECTOR: PLANEAMIENTO
OBJETO: PROGRAMACIÓN DE COMPRA Y PRODUCCIÓN

Una torre de destilación procesa tres tipos de crudo: San Sebastián (SS), Cañadón Seco (SC) y Escalante (ES) para producir Nafta (NF), Diesel Oil (DO) y Crudo Reducido (CR).

Los rendimientos y costos de los crudos, y los precios de venta de los productos, se indican en la tabla siguiente:

Producto / Crudo	NF	DO	CR	Costo unitario ($/m^3)
SS	0.40	0.29	0.29	20
CS	0.30	0.30	0.38	15
ES	0.10	0.28	0.60	12
Precio de Venta ($/m^3)	57	31	22	

La torre tiene una capacidad de alimentación de crudo de 100000 m^3 por mes, pero no se puede extraer más de 900 m^3 de nafta por día, ya que una cantidad superior inundaría la torre.

La empresa proveedora puede suministrar para el mes de abril las siguientes cantidades:

SS = 90000 m^3
CS = 50000 m^3
ES = 60000 m^3

Cabe destacar que los crudos se corren independientemente, es decir que no se mezclan antes de ser procesados.

Se puede suponer que todo lo producido puede venderse.

Existe un compromiso de proveer mensualmente a una petroquímica 30000 m^3 de crudo reducido por mes.

Se desea determinar el programa de producción para el mes de abril, es decir:

a. tipo y cantidad de crudo a adquirir
b. cantidad de días que se deberá correr cada uno de los crudos.

Resolución

Definición de variables:

SS, CS, ES: Cantidad de cada crudo a procesar por mes

NF, DO, CR: Cantidad a producir de cada uno de los productos por mes.

Consideraciones previas:

La dificultad de este problema radica en determinar la capacidad de procesamiento de la torre. La cantidad máxima de crudo que se puede correr estará dada por la capacidad de alimentación o por la restricción de extracción de nafta.

Debido a la restricción de extracción de nafta se podría procesar en el mes, como máximo, la siguiente cantidad de SS:

$0.4 \,.\, SS = 27000$ (es decir $SS = 67500 \text{ m}^3$)

Esta cantidad es menor que la que se podría procesar por la restricción de alimentación de la torre (100000 m^3). En consecuencia, la cantidad a procesar de SS queda limitada por la extracción de nafta.

Del crudo CS, como consecuencia de la extracción se puede procesar, como máximo:

$0.3 \,.\, CS = 27000$ (es decir, $CS = 90000 \text{ m}^3$)

Aquí también, la cantidad a correr de CS queda limitada por la extracción de nafta.

Finalmente, del crudo ES se podría procesar como consecuencia de la extracción de nafta:

$0.1 \,.\, ES = 27000$ (es decir, $ES = 270000 \text{ m}^3$)

Sin embargo, no se puden procesar más de 100000 m3 debido a la limitación de la alimentación.

En consecuencia, la restricción será:

$$\frac{SS}{67500} + \frac{CS}{90000} + \frac{ES}{100000} \leq 1$$

o, multiplicando por 100000:

$$1.481481 \text{ SS} + 1.111111 \text{ CS} + 1 \text{ ES} \leq 100000$$

Esto significa que las velocidades de extracción de la nafta, al correrse los distintos crudos serán:

$$\text{SS:} \quad \frac{100000 \cdot 0.4}{30} = 1333.33 > 900 \quad \Rightarrow \quad 900 \frac{\text{m}^3}{\text{día}}$$

$$\text{CS:} \quad \frac{100000 \cdot 0.3}{30} = 1000 > 900 \quad \Rightarrow \quad 900 \frac{\text{m}^3}{\text{día}}$$

$$\text{ES:} \quad \frac{100000 \cdot 0.1}{30} = 333.33 < 900 \quad \Rightarrow \quad 333.33 \frac{\text{m}^3}{\text{día}}$$

Formulación:

- Función objetivo:

  Z) MAX 57 NF + 31 DO + 22 CR - 15 SS -14 CS - 12 ES

Sujeto a:

- Restricciones de disponibilidad:

DSS) $SS \leq 90000$
DCS) $CS \leq 50000$
DES) $ES \leq 60000$

- Restricción de capacidad de la torre:

CTD) $1.481481\ SS + 1.111111\ CS + ES \leq 100000$

- Balance de productos obtenidos:

BNF) $0.40\ SS + 0.30\ CS + 0.10\ ES - NF = 0$
BD0) $0.29\ SS + 0.30\ CS + 0.28\ ES - DO = 0$
BCR) $0.29\ SS + 0.38\ CS + 0.60\ ES - CR = 0$

- Requerimiento mínimo de Crudo Reducido:

RCR) $CR \geq 30000$

- Número de días de procesamiento (es igual a la cantidad de nafta obtenida por cada tipo de crudo, en m^3 por mes, dividido la velocidad de extracción de nafta para ese crudo, en m^3 por día). Para el crudo San Sebastián es: 0.4/900 . SS, para Cañadón Seco es 0.3/900 . CS y para Escalante es 0.1/333.33 . ES.

TSS) $TSS - 0.000444\ SS = 0$
TCS) $TCS - 0.000333\ CS = 0$
TES) $TES - 0.0003\ ES = 0$

- Condiciones de las variables:

No negativas.

Solución:

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z) 1732760.

VARIABLE	VALOR	CTO.OP.
NF	26032.78	0.00
DO	24179.35	0.00
CR	30000.00	0.00
SS	26159.57	0.00
CS	50000.00	0.00
ES	5689.54	0.00
TSS	11.61	0.00
TCS	16.65	0.00
TES	1.71	0.00

RESTRICCIÓN	SLACK	V.MARGINAL
DSS)	63840.43	0.00
DCS)	0.00	3.41
DES)	54310.46	0.00
CTD)	0.00	15.67
BNF)	0.00	-57.00
BD0)	0.00	-31.00

```
BCR)        0.00       -22.15
RCR)        0.00        -0.15
TSS)        0.00         0.00
TCS)        0.00         0.00
TES)        0.00         0.00
```

PROBLEMA No. 32
INDUSTRIA: COSMÉTICOS
SECTOR: PLANEAMIENTO DE PRODUCCIÓN
OBJETO: PROGRAMACIÓN DE COMPRA Y FABRICACIÓN

Una empresa de cosméticos fabrica dos champúes diferentes M y N a partir de 5 materias primas A, B, C, D y E.

Las materias primas tienen un contenido de una materia tóxica. El producto M no debe exceder el 0.5 % de ese tóxico, mientras que el porcentaje máximo admitido del producto N es el 0.4 %.

Cada materia prima tiene un único proveedor, que dispone de una cantidad máxima. En el caso de entregar la materia prima, el proveedor requiere que se le compre un lote mínimo. En esta situación, hay un costo de transporte fijo (independiente de la cantidad comprada).

El proceso consiste en mezclar las materias primas en una mezcladora para obtener primero un producto y luego el otro. El tiempo total disponible en el período para el mezclado es de 700 hs.

Cuando se procesa la mezcla del producto M se tarda 0.5 hs/Kl, mientras que cuando se procesa el producto N, el tiempo es de 0.6 hs/Kl. Si, en el período se elaboran ambos champúes, se requiere un tiempo de preparación de la mezcladora de 100 hs entre cada mezcla.

El costo horario de procesamiento de A es de M es de 100 $/h y el de N, 110 $/h.

Si se utiliza A en la mezcla de M, se debe cumplir que B esté presente en la mezcla en una cantidad de por lo menos un 10% de M, y que la cantidad de C sea mayor o igual a D.

La cantidad de B en la mezcla de N debe ser tal que $N = 800 - 400 \,.\, e^{-\frac{B}{30}}$

El precio de venta de M es de 500 $/Kl y el de N 400 $/Kl

Si se elabora M, debe producirse como mínimo 200 Kg Si se elabora N, la cantidad mínima debe ser de 150 Kg

Los datos relevantes se dan en la tabla. Formular un modelo matemático que permita optimizar la operación del período en cuestión.

M. PRIMA	A	B	C	D	E
Costo ($/Kl)	310	300	280	250	100
Disponibilidad (Kl)	150	200	240	150	300
Lote mínimo de compra (Kl)	20	10	20	50	50
% de substancia tóxica	0.25	0.35	0.40	0.55	0.6
Costo de Transporte ($/lote)	10000	10000	9000	8000	7000

Resolución

Definición de variables:

i (A, B, C, D, E): Cantidad de materia prima i a comprar.

j (M, N): Cantidad de champú j a elaborar

ij: Cantidad de M. Prima i en el champú j.

Ii: Variable binaria que se activa cuando se adquiere la materia prima i.

Iij: Variable binaria que se activa cuando la materia prima i forma parte de la mezcla en el champú j.

CHj: Horas de fabricación de champú j

Ij: Variable binaria que se activa cuando se produce j

I: Variable binaria que se activa cuando se producen ambos champúes en el período.

ALFAk: Vectores *mesh* para linealizar la relación de B en N.

Ek: Variables binarias para permitir solamente habilitación de vectores *mesh* vecinos

EE: Variable binaria que se activa cuando se envía B a la mezcla de N.

Consideraciones previas:

Para la restricción de B en N, definiremos 5 vectores *mesh* (para B en N igual a 0, 50, 100, 150 y 200). Conforme a la expresión dada tendremos que los valores de N son:

	BN	N
ALFA0	0	400
ALFA1	50	724.45
ALFA2	100	785.73
ALFA3	150	797.30
ALFA4	200	799.49

Formulación:

- Función objetivo:

MAX 500 M + 400 N - 310 A - 300 B - 280 C - 250 D - 100 E - 10000 IA - 10000 IB
- 9000 IC - 8000 ID - 7000 IE - 100 CHM - 110 CHN

Sujeto a:

- Disponibilidad de materia prima:

DA) $A - 150\ IA \leq 0$
DB) $B - 200\ IB \leq 0$
DC) $C - 240\ IC \leq 0$
DD) $D - 150\ ID \leq 0$
DE) $E - 300\ IE \leq 0$

- Lotes mínimos de compra:

LMA) $A - 20\ IA \geq 0$
LMB) $B - 10\ IB \geq 0$
LMC) $C - 20\ IC \geq 0$
LMD) $D - 50\ ID \geq 0$
LME) $E - 50\ IE \geq 0$

- Balance de materia prima:

BA) $A - AM - AN = 0$
BB) $B - BM - BN = 0$
BC) $C - CM - CN = 0$
BD) $D - DM - DN = 0$
BE) $E - EM - EN = 0$

- Balance de champúes:

BM) $- M + AM + BM + CM + DM + EM = 0$
BN) $- N + AN + BN + CN + DN + EN = 0$

- Limitación de componente tóxico:

TMM) $-0.5 M + 0.25 AM + 0.35 BM + 0.4 CM + 0.55 DM + 0.6 EM \leq 0$
TMN) $-0.4 N + 0.25 AN + 0.35 BN + 0.4 CN + 0.55 DN + 0.6 EN \leq 0$

- Cantidad de horas de elaboración de champúes en mezcladora:

CHM) $CHM - 0.5 M = 0$
CHN) $CHN - 0.6 N = 0$

- Restricciones para habilitar o no la producción de los champúes. Se toma un M arbitrariamente alto (por ejemplo 1500)

IM) $M - 1500 IM \leq 0$
IN) $N - 1500 IN \leq 0$

- Restricción para habilitar la variable "I" cuando se elaboran ambos champúes:

I) $IM + IN - I \leq 1$

- Disponibilidad máxima de mezcladora:

DMM) $100 I + CHM + CHN \leq 700$

- Restricciones para habilitar o no A en M y B en M:

IAM) $AM - 150 IAM \leq 0$

IBM) $BM - 200 IBM \leq 0$

- Si se utiliza A en la mezcla de M, debe haber por lo menos un 10 %:

R1) $1000 IAM + 0.1 M - AM \leq 1000$

- Si se utiliza A en la mezcla de M, la cantidad de C debe ser mayor o igual a la cantidad de D

R2) $1000 IAM - C + D \leq 1000$

- Restricciones de B en N:

R3) $- BN + 0 ALFA0 + 50 ALFA1 + 100 ALFA2 + 150 ALFA3 + 200 ALFA4 = 0$

R4) $- N + 400 ALFA0 + 724.45 ALFA1 + 785.73 ALFA2 + 797.30 ALFA3 + 799.49 ALFA4 = 0$

R5) $ALFA0 + ALFA1 + ALFA2 + ALFA3 + ALFA4 - EE = 0$

R6) $ALFA0 - E0 \leq 0$

R7) $ALFA1 - E1 \leq 0$

R8) $ALFA2 - E2 \leq 0$

R9) $ALFA3 - E3 \leq 0$

R10) $ALFA4 - E4 \leq 0$

R11) $E0 + E2 - EE \leq 0$

R12) $E0 + E3 - EE \leq 0$

R13) $E0 + E4 - EE \leq 0$

R14) $E1 + E3 - EE \leq 0$

R15) $E1 + E4 - EE \leq 0$

R16) $E2 + E4 - EE \leq 0$

R17) $E0 + E1 + E2 + E3 + E4 \leq 2$

- Restricciones de cantidades mínimas de M y N:

  RCMM) $M - 200\ IM \geq 0$

  RCMN) $N - 150\ IN \geq 0$

- Condiciones de las variables:

  Ii, Iij, Ij, Ek, EE: variable binarias.

  El resto de las variables: no negativas

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z)        124160.0
```

VARIABLE	VALUE	C.OPORTUNIDAD
IA	1.000000	-27500.000000
IB	1.000000	-25200.000000
IC	1.000000	-27960.000000
ID	1.000000	-700.000000
IE	1.000000	-42800.000000
I	1.000000	0.000000
IM	1.000000	0.000000
IN	1.000000	0.000000
IAM	0.000000	0.000000
IBM	1.000000	0.000000
E1	1.000000	0.000000
E2	0.000000	0.000000
E3	0.000000	0.000000
E4	0.000000	0.000000
E0	1.000000	0.000000
EE	1.000000	0.000000
M	500.000000	0.000000
N	540.000000	0.000000

A	150.000000	0.000000
B	200.000000	0.000000
C	240.000000	0.000000
D	150.000000	0.000000
E	300.000000	0.000000
CHM	250.000000	0.000000
CHN	324.000000	0.000000
AM	0.000000	0.000000
AN	150.000000	0.000000
BM	178.425034	0.000000
BN	21.574972	0.000000
CM	26.968716	0.000000
CN	213.031281	0.000000
DM	0.000000	0.000010
DN	150.000000	0.000000
EM	294.606262	0.000000
EN	5.393743	0.000000
ALFA0	0.568501	0.000000
ALFA1	0.431499	0.000000
ALFA2	0.000000	0.000000
ALFA3	0.000000	0.000000
ALFA4	0.000000	0.000000

RESTRICCIÓN	SLACK	V. MARGINAL
DA)	0.000000	250.000000
DB)	0.000000	176.000000
DC)	0.000000	154.000000
DD)	0.000000	58.000000
DE)	0.000000	166.000000
LMA)	130.000000	0.000000
LMB)	190.000000	0.000000
LMC)	220.000000	0.000000
LMD)	100.000000	0.000000
LME)	250.000000	0.000000
BA)	0.000000	-560.000000
BB)	0.000000	-476.000000
BC)	0.000000	-434.000000
BD)	0.000000	-308.000000
BE)	0.000000	-266.000000
BM)	0.000000	-770.000000
BN)	0.000000	-770.000000
TMM)	0.000000	840.000000
TMN)	0.000000	840.000000
CHM)	0.000000	-100.000000
CHN)	0.000000	-110.000000
IM)	1000.000000	0.000000
IN)	960.000000	0.000000
I)	0.000000	0.000000
DMM)	26.000000	0.000000
IAM)	0.000000	0.000000
IBM)	21.574972	0.000000
R1)	950.000000	0.000000
R2)	1090.000000	0.000000
R3)	0.000000	0.000000
R4)	0.000000	0.000000
R5)	0.000000	0.000000
R6)	0.431499	0.000000
R7)	0.568501	0.000000

```
          R8)          0.000000          0.000000
          R9)          0.000000          0.000000
         R10)          0.000000          0.000000
         R11)          0.000000          0.000000
         R12)          0.000000          0.000000
         R13)          0.000000          0.000000
         R14)          0.000000          0.000000
         R15)          0.000000          0.000000
         R16)          1.000000          0.000000
         R17)          0.000000          0.000000
        RCMM)        300.000000          0.000000
        RCMN)        390.000000          0.000000

 NO. DE ITERACIONES = 383
```

PROBLEMA No. 33
INDUSTRIA: ADMINISTRACIÓN PÚBLICA
SECTOR: LICITACIONES
OBJETO: SELECCIÓN DE ALTERNATIVAS

La secretaría de obras públicas de la provincia llamó a licitación para la ejecución de 5 obras. Se han presentado 9 empresas, que cotizaron de la forma indicada en la tabla (en miles de $).

El gobierno de la provincia ha decidido no otorgar a una misma empresa más de una obra.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	650	700	735	690	700	800	730	710
2	550	340	445	400	420	450	390	380
3	250	240	295	335	320	330	310	350
4	130	200	155	200	135	145	190	200
5	360	330	325	340	375	350	300	295

1. *Formular el modelo matemático que permita asignar óptimamente las obras.*
2. *Qué modificaciones habría que hacer al programa matemático si se establecen las siguientes restricciones adicionales:*

   a. Si se adjudica una obra a la empresa B, también se debe adjudicar una obra a la empresa F

   b. Si se adjudica una obra a la empresa A, a la empresa D no se le puede adjudicar ninguna obra.

Resolución

Definición de variables:

#i: Variable binaria que se activa si se adjudica la obra i (1, 2, 3, 4, 5) a la empresa # (A, B, C, D, E, F, G, H).

I#: Variable binaria que se activa si la empresa # resulta adjudicataria de una obra.

Formulación:

- Funcional

MIN 650 A1 + 700 B1 + 735 C1 + 690 D1 + 700 E1 + 800 F1 + 730 G1 + 710 H1 + 550 A2 + 340 B2 + 445 C2 + 400 D2 + 420 E2 + 450 F2 + 390 G2 + 380 H2 + 250 A3 + 240 B3 + 295 C3 + 335 D3 + 320 E3 + 330 F3 + 310 G3 + 350 H3 + 130 A4 + 200 B4 + 155 C4 + 200 D4 + 135 E4 + 145 F4 + 190 G4 + 200 H4 + 360 A5 + 330 B5 + 325 C5 + 340 D5 + 375 E5 + 350 F5 + 300 G5 + 295 H5

Sujeto a:

- Se deben adjudicar todas las obras

O1) A1 + B1 + C1 + D1 + E1 + F1 + G1 + H1 = 1

O2) A2 + B2 + C2 + D2 + E2 + F2 + G2 + H2 = 1

O3) A3 + B3 + C3 + D3 + E3 + F3 + G3 + H3 = 1

O4) A4 + B4 + C4 + D4 + E4 + F4 + G4 + H4 = 1

O5) A5 + B5 + C5 + D5 + E5 + F5 + G5 + H5 = 1

- A cada empresa no se le puede adjudicar más de una obra

EA) A1 + A2 + A3 + A4 + A5 - IA ≤ 0

EB) B1 + B2 + B3 + B4 + B5 - IB ≤ 0

EC) C1 + C2 + C3 + C4 + C5 - IC ≤ 0

ED) D1 + D2 + D3 + D4 + D5 - ID ≤ 0

EE) E1 + E2 + E3 + E4 + E5 - IE ≤ 0

EF) F1 + F2 + F3 + F4 + F5 - IF ≤ 0

EG) G1 + G2 + G3 + G4 + G5 - IG ≤ 0

EH) H1 + H2 + H3 + H4 + H5 - IH ≤ 0

Condiciones de las variables:

Todas binarias

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Z)        1740

VARIABLE        VALOR

D1              1
B2              1
A3              1
E4              1
C5              1
IA              1
IB              1
IC              1
ID              1
IE              1
```

```
NO. DE ITERACIONES = 34
```

El resto de las variables es igual a cero.

- Si se adjudica una obra a la empresa B, también se debe adjudicar una obra a la empresa F

R1) $IF - IB \geq 0$

R2) $IA + ID = 1$

En este caso, podría ocurrir que para cumplir con R1) el programa active a IF pero a ninguna Fi, situación que satisface la restricción EF pero que no cumpliría con lo que se pide. Para ello, se agrega la siguiente restricción:

R3) $IA + IB + IC + ID + IE + IF + IG + IH \leq 5$

Solución:

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
Z)       1715
VARIABLE        VALOR
   A1             1
   H2             1
   B3             1
   F4             1
   G5             1
   IA             1
   IB             1
   IF             1
   IG             1
   IH             1
```

El resto de las variables es igual a cero.

PROBLEMA No. 34
INDUSTRIA: PAPEL
SECTOR: CORTE
OBJETO: MINIMIZACIÓN DE DESPERDICIOS

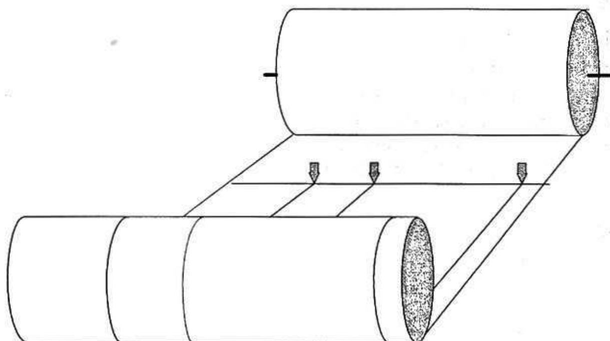
Una compañía tiene en stock bobinas de papel de 3000 m de longitud y de un ancho de 60 cm Se ha recibido una orden de bobinas de papel de dicha longitud pero en cuatro diferentes anchos, cuya cantidad se indica en la tabla.

Por lo tanto, la compañía deberá cortar las bobinas de ancho estándar en bobinas del ancho requerido para satisfacer los requerimientos de la orden. A tal fin dispone de una máquina cortadora, en donde puede posicionar la cantidad de cuchillas necesarias en diferentes ubicaciones.

ANCHO	CANTIDAD
26 cm	1000 bobinas
20 cm	1500 bobinas
15 cm	1200 bobinas
13 cm	1100 bobinas

1) Formule un modelo de programación matemática para minimizar los desperdicios

2) *Qué modificaciones habría que hacer para minimizar el número de bobinas de ancho estándar a usar.*



Resolución

Consideraciones previas:

Las posiciones de corte posibles son:

1) 2 bobinas de 26 cm (desperdicio: 8 cm)
2) 1 bobina de 26 cm, 1 de 20 cm y 1 de 13 cm (desperdicio: 1 cm)
3) 1 bobina de 26 cm, 1 de 15 cm y 1 de 13 cm (desperdicio: 6 cm)
4) 1 bobina de 26 cm, y 2 de 15 cm (desperdicio: 4 cm)
5) 1 bobina de 26 cm, y 2 de 13 cm (desperdicio: 8 cm)
6) 3 bobinas de 20 cm (desperdicio: 0 cm)
7) 2 bobinas de 20 cm, y 1 de 15 cm (desperdicio: 5 cm)
8) 2 bobinas de 20 cm, y 1 de 13 cm (desperdicio: 7 cm)
9) 1 bobina de 20 cm, y 2 de 15 cm (desperdicio: 10 cm)
10) 1 bobina de 20 cm, y 3 de 13 cm (desperdicio: 1 cm)
11) 1 bobina de 20 cm, 1 de 15 cm y 1 de 13 cm (desperdicio: 12 cm)
12) 4 bobinas de 15 cm (desperdicio: 0 cm)
13) 3 bobinas de 15 cm, y 1 de 13 cm (desperdicio: 2 cm)
14) 2 bobina de 15 cm, y 2 de 13 cm (desperdicio: 4 cm)

15) 1 bobina de 15 cm, y 3 de 13 cm (desperdicio: 6 cm)

16) 4 bobinas de 13 cm (desperdicio: 8 cm)

Definición de variables:

Ni: Cantidad de bobinas que se cortarán en la posición i

N: Cantidad total de bobinas estándar cortadas

D: Desperdicio

Formulación:

- 1er. caso) Minimización de desperdicio:

	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7	N8	N9	N10	N11	N12	N13	N14	N15	N16	N	D		RHS
Z)																		1		MIN
26)	2	1	1	1	1														=	1000
20)		1				3	2	2	1	1	1								=	1500
15)			1	2			1		2		1	4	3	2	1				=	1200
13)		1	1		2			1		3	1		1	2	3	4			=	1100
D)	8	1	6	4	8	0	5	7	10	1	12	0	2	4	6	8		-1	=	0
N)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1		=	0

Resolución:

VARIABLE	VALOR
D	1035
N1	0
N2	1000
N3	0
N4	0
N5	0
N6	155
N7	0
N8	0
N9	0
N10	35
N11	0
N12	300
N13	0
N14	0
N15	0
N16	0
N	1490

- 2o. caso) Minimización de cantidad de bobinas estándar:

Formulación:

La única diferencia con el planteo anterior consiste en cambiar el funcional por

- Funcional

  MIN N

Resolución:

VARIABLE	VALOR
N	1489
N1	0
N2	1000
N3	0
N4	0
N5	0
N6	155
N7	1
N8	0
N9	0
N10	33
N11	0
N12	299
N13	1
N14	0
N15	0
N16	0
D	1040

PROBLEMA No. 35
INDUSTRIA: GENERAL
SECTOR: PLANEAMIENTO DE PRODUCCIÓN E INVERSIÓN PUBLICITARIA
OBJETO: PROGRAMACIÓN SEPARABLE

Una compañía tiene planificado lanzar dos productos (A y B) que venderá por única vez. Para ello dispondrá de 120000 minutos de un recurso básico de fabricación y de $15000 para invertir en publicidad.
Cada unidad de A requiere 9 minutos del recurso de fabricación, mientras que cada unidad de B insume 12 minutos.
La venta de cada uno de los productos depende de la cantidad de dinero a invertir en publicidad.
La relación venta-inversión para cada caso (en miles de unidades de producto y miles de $) se muestra en las figuras.
La contribución marginal (precio de venta menos costos directos de fabricación, excluyendo el gasto publicitario) es $10 y $11 para A y B, respectivamente.
Formular un modelo que permita determinar la cantidad óptima a producir de A y B. Determinar el beneficio que se obtendría por cada $k que se pueda invertir en publicidad.

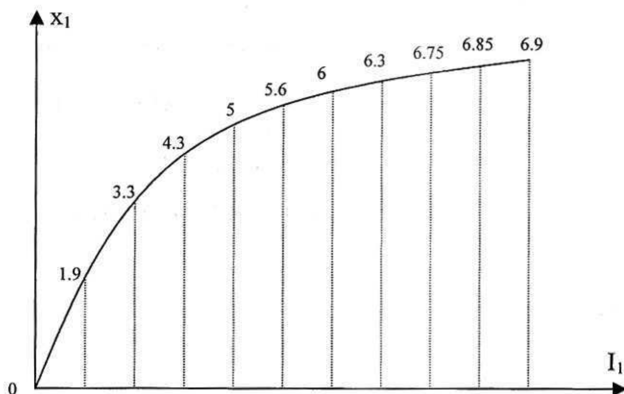
Resolución

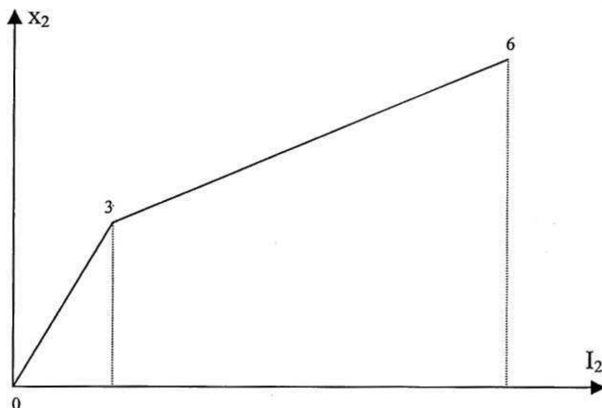
Definición de variables:

Xi: Cantidad de unidades a fabricar (y vender) del producto i
Ii: Cantidad de dinero a invertir en publicidad para el producto i
Ai: Vectores *mesh* para linealizar la curva correspondiente a la relación venta-inversión del producto A. Se definen 10 vectores.

Bi: Vectores *mesh* para establecer la relación venta-inversión correspondiente al producto B.

Se definen 3 vectores.





Formulación:

- Función objetivo:

  Z) MAX 10 X1 + 11 X2 - I1 – I2

  Sujeto a:

- Cantidad de dinero máxima a invertir en publicidad:

  IMAX) I1 + I2 $\leq$ 15000

- Limitación del recurso de fabricación:

  PROC) $9\ X1 + 12\ X2 \leq 120000$

- Linealización de la curva venta-inversión para el producto A:

  B.X1) $-X1 + 1900\ A1 + 3300\ A2 + 4300\ A3 + 5000\ A4 + 5600\ A5 + 6000\ A6 + 6300\ A7 + 6750\ A8 + 6850\ A9 + 6900\ A10 = 0$

  B.I1) $-I1 + 1000\ A1 + 2000\ A2 + 3000\ A3 + 4000\ A4 + 5000\ A5 + 6000\ A6 + 7000\ A7 + 8000\ A8 + 9000\ A9 + 10000\ A10 = 0$

  B.A1) $A0 + A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + A6 + A7 + A8 + A9 + A10 = 1$

- Representación de la relación venta-inversión para el producto B, con programación separable:

  B.X2) $-X2 + 3000\ B1 + 6000\ B2 = 0$

  B.I2) $-I2 + 2000\ B2 + 10000\ B2 = 0$

  B.B2) $B0 + B1 + B2 = 1$

- Condiciones de las variables:

  No negativas.

<u>Solución</u>:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      6

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)        104750.0

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1      6750.000000          0.000000
        X2      4750.000000          0.000000
        I1      8000.000000          0.000000
        I2      7000.000000          0.000000
        A1         0.000000      29250.000000
        A2         0.000000      18000.000000
        A3         0.000000      10750.000000
        A4         0.000000       6500.000000
        A5         0.000000       3250.000000
        A6         0.000000       2000.000000
        A7         0.000000       1750.000000
        A8         1.000000          0.000000
        A9         0.000000       1750.000000
       A10         0.000000       4000.000000
        A0         0.000000      45500.000000
        B1         0.416667          0.000000
        B2         0.583333          0.000000
        B0         0.000000      33000.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
     IMAX)         0.000000          1.750000
```

```
     PROC)       2250.000000          0.000000
     B.X1)          0.000000        -10.000000
     B.I1)          0.000000          2.750000
     B.A1)          0.000000      45500.000000
     B.X2)          0.000000        -11.000000
     B.I2)          0.000000          2.750000
     B.B2)          0.000000      33000.000000

 NO. ITERATIONS=        6
```

Como en ninguno de los dos casos se activaron vectores *mesh* no vecinos, no es necesario forzar la solución para que ello ocurra.

Por cada $1000 adicionales que se puedan invertir en publicidad, el beneficio aumentará en $1750.

BIBLIOGRAFÍA

ACKOFF-SASIENI, *Fundamentals of Operations Research*, Wiley, 1968.

ANDERSON - SWEENEY - WILLIAMS, *Introducción a los Modelos Cuantitativos para Administración*, Grupo Editorial Iberoamericana, 1993.

BARBALLA - CERDÁ - SANZ, *Optimización, Cuestiones, Ejercicios y Aplicaciones para Economía*, Prentice-Hall, 2000.

BONINI - HAUSMAN - BIERMAN - IRWING, *Análisis Cuantitativo para los Negocios,* McGraw-Hill, 2000.

BRADLEY, S., *Applied Mathematical Programming*, Massachussets, Addison - Welwy, 1977.

BRONSON, *Investigación de Operaciones*, Shaum-McGraw-Hill.

CALVETE FERNÁNDEZ, PEDRO COLLORES, *Programación lineal, entera y Meta*, PUZ, 1994.

CHACKO, GEORGE, *Operations Research/Management Science,* McGraw-Hill, 1993.

DAELLENBACH-GEORGE-MCNICKLE, *Introducción a Técnicas de Investigación de Operaciones*, Cecsa, 1983.

DANTZIG-MUKUND, *Linear Programming*, Springer, 1997.

DAVIS-MCKEOWN, *Modelos Cuantitativos para Administración*, Iberoamérica, 1986.

ENRICK, NORBERT L., *Cómo dirigir científicamente la empresa,* Barcelona, Editores Técnicos Asociados, 1969.

EPPEN-GOULD-SCHMIDT, *Introductory Management Science*, Prentice-Hall, 1993.

GALLAGHER-WATSON, *Métodos Cuantitativos para decisiones empresariales*, MacGraw-Hill.

GILLET, BILLY E., *Introduction to Operations Research. A computer Oriented Algorithmic Approach*, MacGraw-Hill, 1976.

HILLIER - LIEBERMAN, *Introducción a la Investigación de Operaciones,* McGraw - Hill, 1977.

KAUFMAN, A., *Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones.*

MARÍN, I.-PALMA, R.-ROJO, H., *La Programación Lineal: Modelización y Enunciados*, Macchi, 1980.

MARIN, ISIDORO, *Investigación Operativa,* C.E.I., 1976.

— *Manual Básico del Método de Camino Crítico*, Macchi, 1977.

— *La Programación Lineal en el Proceso de Decisión*, Macchi, 1978.

MATHUR, SOLOW, *Managements Science. The Art of Decision Making*, New Jersey, Prentice-Hall, 1994.

MILLER - SCHMIDT, *Ingeniería Industrial e Investigación de Operaciones,* Limusa, 1992.

Operations Research. Problem Solvers, REA, 1983.

PRAWDA, JUAN, *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones,* Limusa, 1981.

RARDIN, *Optimizacion in Operations Research,* Prentice - Hall, 1998.

SCHROEDER, *Operations Managements. Decision Making in the Operations Function*, McGraw - Hill, 1989.

SHAMBLIN, STEVENS, *Investigación de Operaciones. Un enfoque fundamental*, McGraw - Hill, 1975.

SPRINGER - HERLIHY - BEGGS, *Métodos avanzados y modelos,* México, Hispano Americana, 1972.

TAHA, *Investigación de Operaciones*, Alfaomega, 2001.

THEIL - BOOT - KLOEK, *Investigación Operativa y Economía Cuantitativa,* Barcelona, Gustavo Gili, 1969.

THIERAUF, *Toma de Decisiones por medio de Investigación de Operaciones*, Limusa, 2000.

ULLMANN, S., *Métodos Cuantitativos en Administración*, Shaum, 1979.

VANDERMEULEN, DANIEL, *El análisis lineal en la Teoría Económica,* Prentice - Hall, 1971.

WAGNER, HARVEY M., *Principles of Operations Research*, New Jersey, Prentice - Hall, 1975.

WINSTON, W., *Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

ÍNDICE